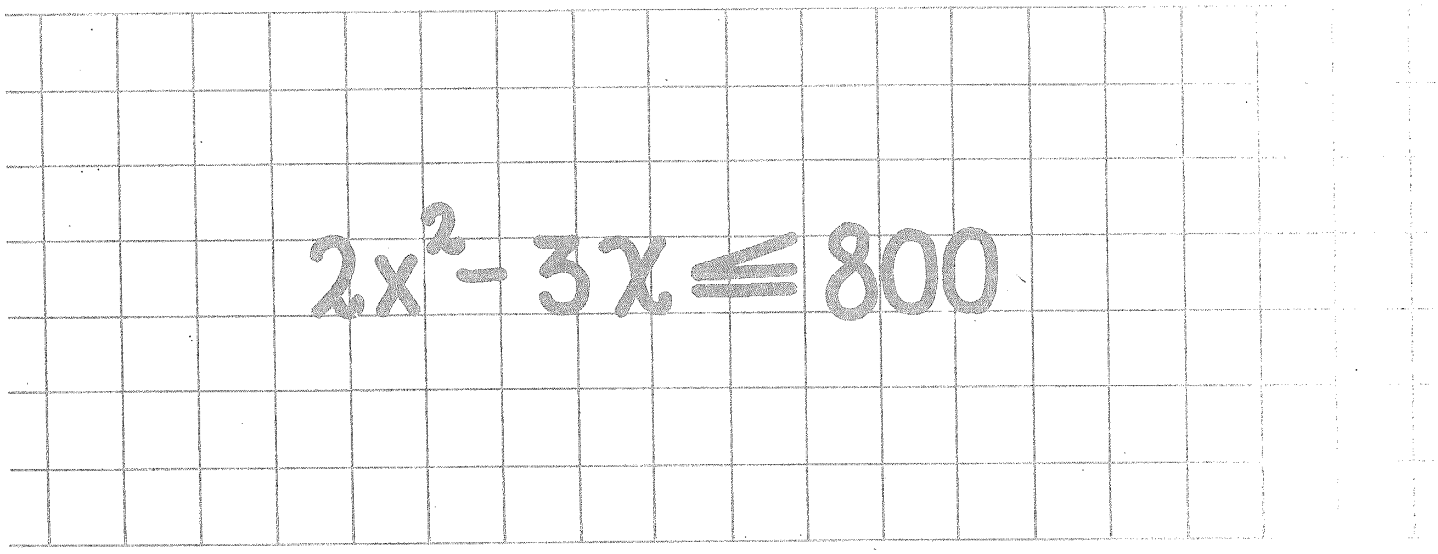
DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. ***Desigualdades de segundo grado***
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. Funciones exponenciales
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 6

DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
DESIGUALDADES DE SEGUNDO GRADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1520-9

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 La desigualdad de segundo grado como modelo matemático 9

6.2 Desigualdades de primer grado (repaso) 20

6.3 Solución de desigualdades de segundo grado. Factorización en $\mathbb{Z}$ por simple inspección 34

6.4 Solución de desigualdades de segundo grado. Factorización en $\mathbb{R}$ 57

6.5 Solución de desigualdades de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$. Primer miembro no factorizado en $\mathbb{R}$ 75

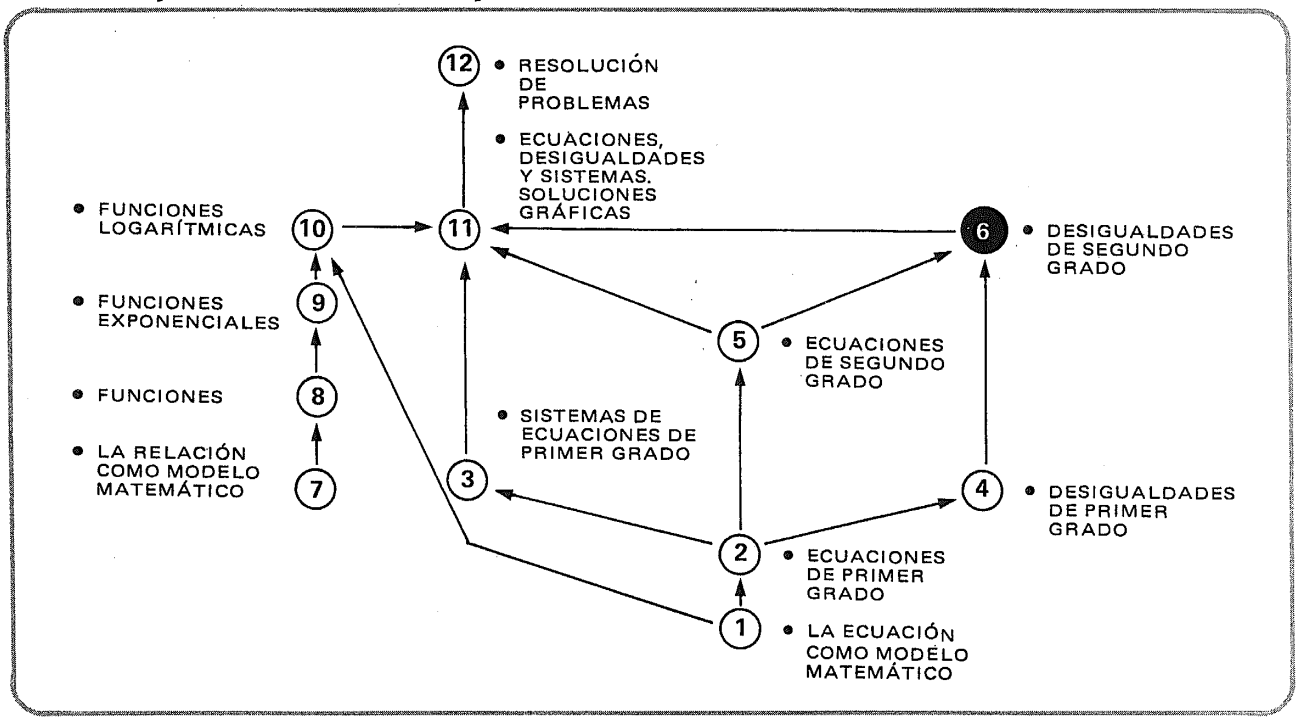
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 6. Desigualdades de segundo grado

Objetivos: resolver desigualdades de segundo grado con una incógnita

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2
• Resolución de desigualdades de primer grado	2	4
• Resolución de ecuaciones de segundo grado	2	5

6.1

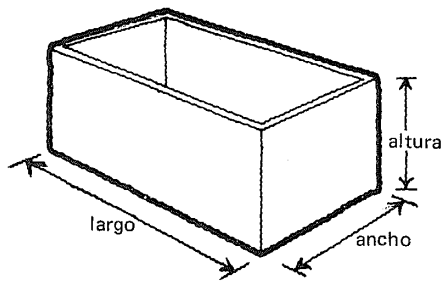
La desigualdad de segundo grado como modelo matemático

1

La situación es la siguiente.

Necesitamos fabricar
una
caja abierta de un cierto material
especial
de tal manera que:

1. El largo sea igual al doble
   del ancho
   y la altura sea igual
   al ancho menos 2 centímetros.



Continúa en el cuadro siguiente

2

2. El costo de fabricación es de
   25 centavos por centímetro cuadrado de material
   utilizado.
3. El costo total de la caja no deberá exceder
   de **800** pesos.
4. El ancho no deberá ser menor de 10 centímetros.
5. Se requiere conocer el rango de posibles
   dimensiones de la caja, dentro de los límites
   establecidos.

3

Intentaremos
construir
un

modelo matemático

de la situación.

4

En primer lugar consideraremos el inciso 3.

El costo de la caja no deberá exceder de 800 pesos.

Si C = costo de fabricación de la caja, en pesos,

la proposición anterior puede ser expresada algebraicamente así:

$C \leq 800$

5

$C \leq 800$

Si A = área de material utilizado

$C =$ [redacted]

de acuerdo con el inciso 2.

0.25A

6

Si

$C \leq 800$ ①

y

$C = 0.25A$ ②

entonces, por sustitución de ② en ① obtenemos:

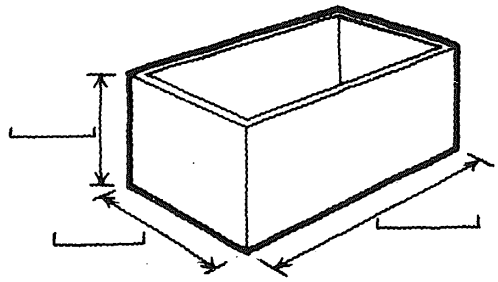
[ ] ③

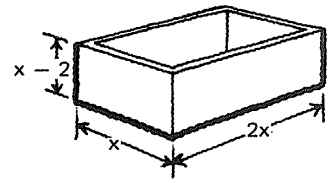
$0.25A \leq 800$

7

$0.25A \leq 800$ ③

Si x = ancho de la caja en centímetros, entonces podemos anotar las dimensiones de la caja, de acuerdo con el inciso ①:





8

$0.25A \leq 800$ ③

$A =$ [ ]

base ↓ $x \cdot 2x$ + laterales ↓ $2(x + 2x)(x - 2)$

$2x^2 + 6x(x - 2)$

$2x^2 + 6x^2 - 12x$

$8x^2 - 12x$

9

Si

$0.25A \leq 800$ ③

y

$A = 8x^2 - 12x$ ④

entonces, por sustitución de ④ en ③:

[ ] ⑤

$0.25(8x^2 - 12x) \leq 800$

10

$0.25(8x^2 - 12x) \leq 800$ ⑤

Efectuando el producto indicado en el primer miembro, obtenemos:

[ ] ⑥

$2x^2 - 3x \leq 800$

11

$2x^2 - 3x \leq 800$

Por otra parte,
de acuerdo con el inciso ④:

[ ]

$x \geq 10$

12

$2x^2 - 3x \leq 800$

$x \in \llcorner\!\!\lrcorner \; x \geq 10$

$\mathbb{R}$

13

$2x^2 - 3x \leq 800$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 10$

El modelo resultante
es una

desigualdad de segundo grado.

14

La solución de este modelo

$2x^2 - 3x \leq 800$

$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 10$

nos permitirá conocer

el **rango de anchos permisibles**

y, por lo tanto,

el **rango de las posibles dimensiones** de la caja.

15

Práctica
de
formación
de
desigualdades de segundo grado
con
una variable, indeterminada o incógnita.

16

El cuadrado de un número
es mayor que 16.

└_____┘

$x^2 > 16$

17

El cuadrado de:

un número aumentado en dos
es mayor que 20:

└_____┘

$(x + 2)^2 > 20$

18

El cuadrado de un número,
aumentado en cinco
es menor que
el doble del cuadrado del mismo número,
disminuido en tres:

$x^2 + 5 < 2x^2 - 3$

19

El cuadrado de un número real,
disminuido en el doble de dicho número
es igual o menor que
el triple del número, aumentado en 10.

$x^2 - 2x \leq 3x + 10 \quad x \in \mathbb{R}$

20

El cuadrado de un número entero,
sumado con la mitad de dicho número
no es menor que cinco.

$x^2 + \frac{x}{2} \not< 5 \quad x \in \mathbb{Z}$

o bien:

$x^2 + \frac{x}{2} \geq 5 \quad x \in \mathbb{Z}$

21

El cuadrado de:

un número natural disminuido en la
cuarta parte de sí mismo
no es ni mayor ni igual a 20.

Por ejemplo:

$$\left(x - \frac{x}{4}\right)^2 < 20 \qquad x \in \mathbb{N}$$

22

Se requiere encontrar el conjunto de
los números reales cuyo cuadrado,
aumentado en cuatro
no sea menor que 5.

$$x^2 + 4 \geq 5 \qquad x \in \mathbb{R}$$

23

Se requiere determinar
el conjunto de los números racionales
tales que el cuadrado de:
cualquiera de ellos
disminuido en la mitad de sí mismo,
sea cuando menos igual a cero.

$$\left(x - \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0 \qquad x \in \mathbb{Q}$$

24

Se requiere encontrar el
conjunto de los números enteros
tales que el
cuadrado de la suma de: cualquiera
de ellos con la tercera parte sí
mismo sea,
como máximo, igual a 25.

$$\left(x + \frac{x}{3}\right)^2 \leq 25 \quad x \in \mathbb{Z}$$

25

A continuación encontraremos
algunos enunciados que
conducen a desigualdades
de segundo grado
con una ideterminada.

26

El producto de un cierto número
y el mismo número aumentado en dos
es mayor que cero:

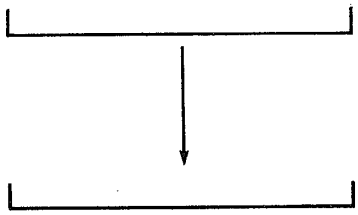
$$x(x + 2) > 0$$

$$\downarrow$$

$$x^2 + 2x > 0$$

27

Un cierto número natural
multiplicado por la mitad de sí mismo
es menor que
el mismo número aumentado en 2.



$$x \cdot \frac{x}{2} < x + 2$$

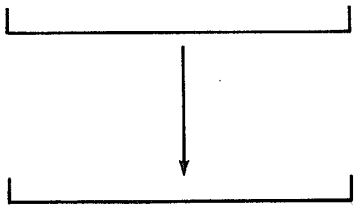
$$\downarrow$$

$$\frac{x^2}{2} < x + 2$$

$$x \in \mathbb{N}$$

28

El producto de: un número aumentado en 3
y el mismo número disminuido en 3
es mayor o igual a 15.



$$(x + 3)(x - 3) \geq 15$$

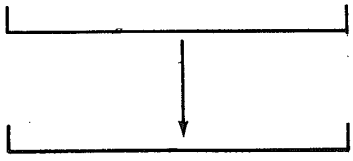
$$\downarrow$$

$$x^2 - 9 \geqslant 15$$

29

El producto de:

el triple de un cierto número, aumentado
en 2
y el doble del mismo número, disminuido
en 3
es igual o menor que el doble del número.



$$(3x + 2)(2x - 3) \leq 2x$$

$$6x^2 - 5x - 6 \leq 2x$$

2.6.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* una desigualdad de segundo grado como el modelo matemático de una situación real;
- *formar,* a partir de un enunciado dado, una desigualdad de segundo grado.

6.2

Desigualdades de primer grado (repaso)

30

Recordemos que
la solución de la desigualdad

$x \geq 5 \qquad x \in \mathbb{Z}$

puede ser expresada así:

└_____┘

como conjunto definido por comprensión.

$\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 5\}$

31

$x \geq 5 \qquad x \in \mathbb{Z}$

Como conjunto definido por extensión:

$S =$ └_____┘

$\{5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$

32

$x \geq 5 \qquad x \in \mathbb{Z}$

Como intervalo:

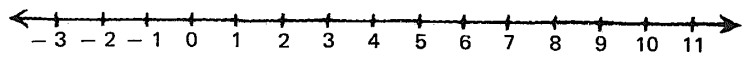
└──────────┘

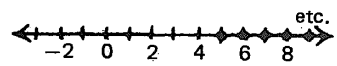
$[5,+\infty) \qquad x \in \mathbb{Z}$

33

$x \geq 5 \qquad x \in \mathbb{Z}$

Representación gráfica (completar):





34

La solución de
la desigualdad

$x < 2 \qquad x \in \mathbb{Q}$

puede ser expresada así:

└──────────┘

como conjunto definido
por comprensión.

$\{x/x \in \mathbb{Q} < x < 2\}$

35

$x < 2 \qquad x \in \mathbb{Q}$

Como intervalo:

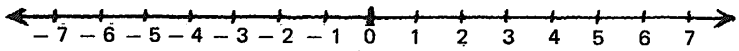
$\lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

$(-\infty, 2) \qquad x \in \mathbb{Q}$

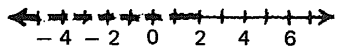
36

$x < 2 \qquad x \in \mathbb{Q}$

Representación gráfica (completar):



De acuerdo con nuestra convención:



37

Recordemos también que

$-2 \leq x \leq 2$

es una expresión abreviada de

$\lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

$x \geq -2 \wedge x \leq 2$

38

$-2 \leq x \leq 2 \qquad x \in \mathbb{R}$

Expresar la
solución de sistema
como conjunto definido por comprensión:

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 2\}$

39

$-2 \leq x \leq 2 \qquad x \in \mathbb{R}$

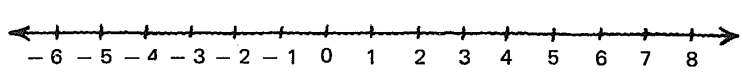
Como intervalo:

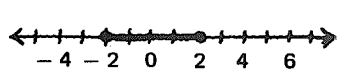
$[-2, 2] \qquad x \in \mathbb{R}$

40

$-2 \leq x \leq 2 \qquad x \in \mathbb{R}$

Completar su representación gráfica:





41

Observamos que

$[-2, 2]$

es la _____
unión/intersección
de los intervalos

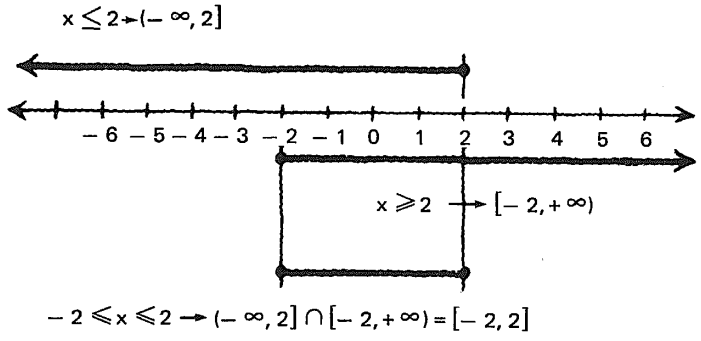
$(-\infty, 2]$ y $[-2, +\infty)$

Intersección

42

Observar con atención.

Gráficamente:



$-2 \leqslant x \leqslant 2 \rightarrow (-\infty, 2] \cap [-2, +\infty) = [-2, 2]$

43

$[-2, 2]$

un intervalo como éste
le hemos llamado:

_____
abierto/cerrado

cerrado

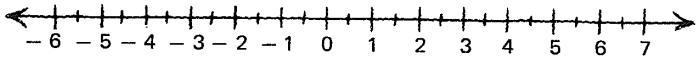
44

$(-2, 2)$

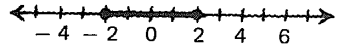
A un intervalo como éste
le hemos llamado

└──────┘
abierto/cerrado

y su representación gráfica
tiene este aspecto (completar)



abierto



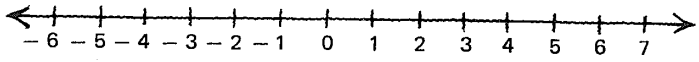
45

$(-2, 2]$ $\quad x \in \mathbb{R}$

A un intervalo como éste
le hemos llamado

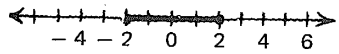
└──────┘

y su representación gráfica
es ésta (completar)



Mixto:

abierto por la izquierda
y
cerrado por la derecha



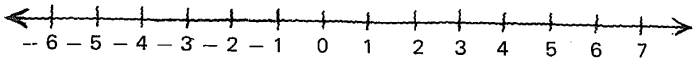
46

$[-2, 2)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

A un intervalo como éste
le hemos llamado

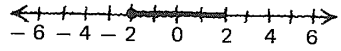
└──────┘

y su
representación gráfica es (completar)



Mixto

cerrado por la izquierda
y abierto por la derecha



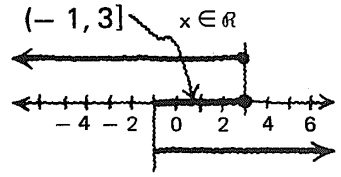
47

Sabemos que la
intersección de los intervalos

$(-\infty, 3]$ y $(-1, +\infty)$ $x \in \mathbb{R}$

es el intervalo

que representamos
gráficamente así:



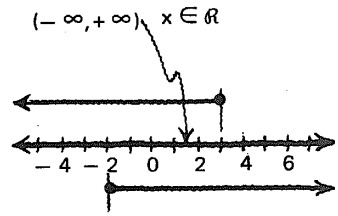
48

Debemos recordar
también
que la **unión** de los intervalos

$(-\infty, 3]$ y $(-2, +\infty)$ $x \in \mathbb{R}$

es el intervalo

cuya representación gráfica es:



49

Es importante observar que

la **intersección** de los intervalos

$(-\infty, 3]$ y $(-2, +\infty)$

contiene
todos los elementos
que pertenecen al intervalo $(-\infty, 3]$

y/o *

al intervalo $(-2, +\infty)$.

* Seleccionar la opción correcta

y

50

El intervalo $(-2, 3]$
es la solución del sistema

$$x > -2 \quad \text{y/o*} \quad x \leq 3$$

* Seleccionar la opción correcta.

• y

(el sistema

$x > -2$ y $x \leq 3$

lo escribimos en forma abreviada así:

$-2 < x \leq 3)$

51

Por otra parte,
la **unión** de los intervalos

$$(-\infty, 3] \quad \text{y} \quad (-2, +\infty)$$

contiene
todos los números
que pertenecen al intervalo $(-\infty, 3]$

o

al intervalo $(-2, +\infty)$

o a ambos.

52

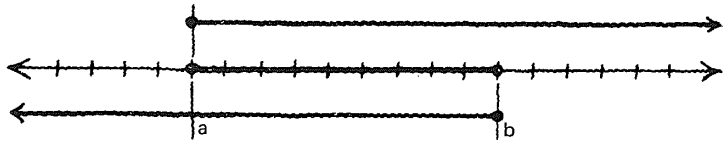
El intervalo $(-\infty, +\infty)$
es la solución del sistema

$$x > -2 \quad \text{y/o*} \quad x \leq 3$$

* Seleccionar la opción correcta.

o

53



$(-\infty, b] \cap [a, +\infty) = [a, b]$

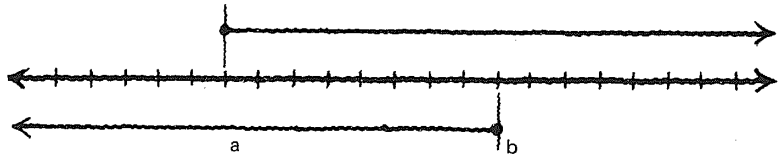
es la solución del sistema:

$$x \geq a \wedge x \leq b$$

↑

y

54



$(-\infty, b] \cup [a, +\infty) = (-\infty, +\infty)$

es la solución del sistema:

$$x \geq a \vee x \leq b$$

↑

o

55

A un sistema como éste:

$$x \geq a > x \leq b$$

le llamaremos

sistema "conjuntivo"

de desigualdades.

56

A un sistema como éste:

$$x \geq a \vee x \leq b$$

le llamaremos

sistema "disyuntivo"

de desigualdades.

57

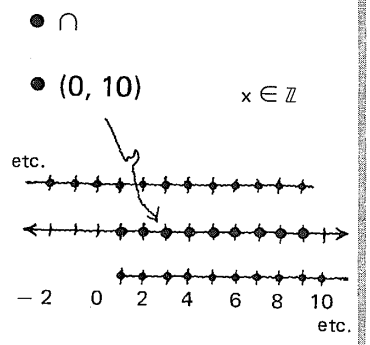
La solución del sistema

$$x < 10 \wedge x > 0 \qquad x \in \mathbb{Z}$$

es

$$(-\infty, 10) \underset{\cap/\cup}{\square} (0, +\infty) = \square$$

y la representamos gráficamente así:



58

Cualquiera de los elementos
del intervalo (0, 10)
(por ejemplo: 5)
es

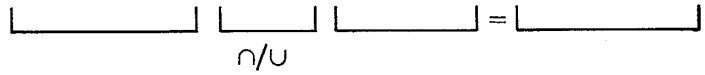
menor que 10
Ⓨ
mayor que 0.

59

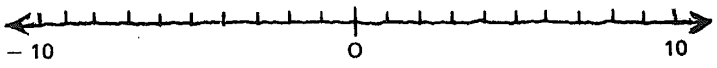
La solución del sistema

$$x < 10 \vee x > 0 \quad x \in \mathbb{Z}$$

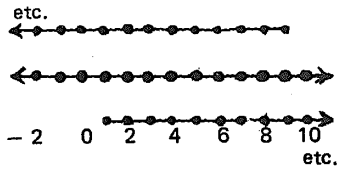
es



cuya representación gráfica es:



$(-\infty, 10) \cup (0, +\infty) = (-\infty, +\infty)$
$x \in \mathbb{Z}$



60

Cualquiera de los elementos
del intervalo $(-\infty, +\infty)$
es

menor que 10
o
mayor que 0
o
ambas cosas a la vez.

Por ejemplo:

– 2 es menor que 10
15 es mayor que 0
5 es menor que 10 y mayor que 0

2.6.2.1.

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

61

Conviene recordar que
para resolver una
desigualdad de primer grado
como ésta

$$x - 5 \geq 12 \qquad x \in \mathbb{R}$$

debemos **transformarla**
en una **desigualdad equivalente**
de la forma $x \gtrless a$
y expresar la solución
en alguna de las formas
estudiadas.

62

También, recordemos
las **reglas del juego** para la **transformación de desigualdades:**

1. Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$ — propiedad aditiva

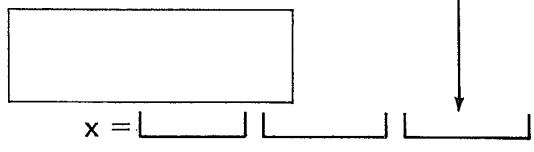
2. Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$
   Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$
   — propiedad multiplicativa

63

Resolvamos, entonces, la siguiente desigualdad:

$$x - 5 \geq 12 \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Transformaciones:



$x =$ ⌊ ⌋ ⌊ ⌋ ⌊ ⌋

2. Conjunto solución definido por comprensión:

⌊ ⌋

3. Conjunto solución como intervalo:

⌊ ⌋

1. $x \geq 12 + 5$
   $x \geq 12 \qquad 17 \in \mathbb{R}$

2. $S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x - 5 > 12\}$

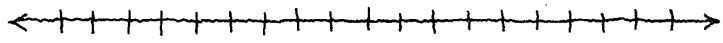
3 $[17, +\infty) \qquad x \in \mathbb{R}$

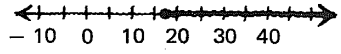
64

$x - 5 \geq 12 \quad x \in \mathbb{R}$

Intervalo solución $[17, +\infty)$

4. Representación gráfica:





65

La **comprobación**

la podemos efectuar por

sustitución

de elementos del

conjunto o intervalo solución

o de su

complemento.

2.6.2.2

Práctica adicional de
resolución de **desigualdades sencillas de primer grado,**
si
se considera necesario.

2.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de *recordar* que:

- la solución de una desigualdad de la forma $x \gtrless a$ puede expresarse: como conjunto definido por comprensión, como conjunto definido por extensión, como intervalo, y en forma gráfica;

- la intersección de dos intervalos o conjuntos solución constituye la solución de un sistema "conjuntivo" de dos desigualdades;

- la unión de dos intervalos o conjuntos solución constituye la solución de un sistema "disyuntivo" de dos desigualdades;

- una desigualdad de primer grado puede ser resuelta mediante su transformación en una desigualdad equivalente de la forma $x \gtrless a$.

6.3

Solución de desigualdades de segundo grado.

Factorización en $\mathbb{Z}$ por simple inspección

66

He aquí una

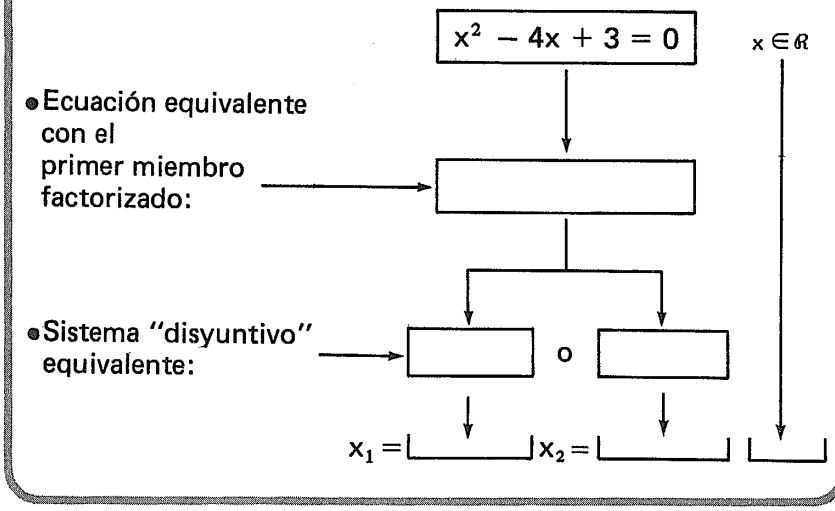
ecuación de segundo grado

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

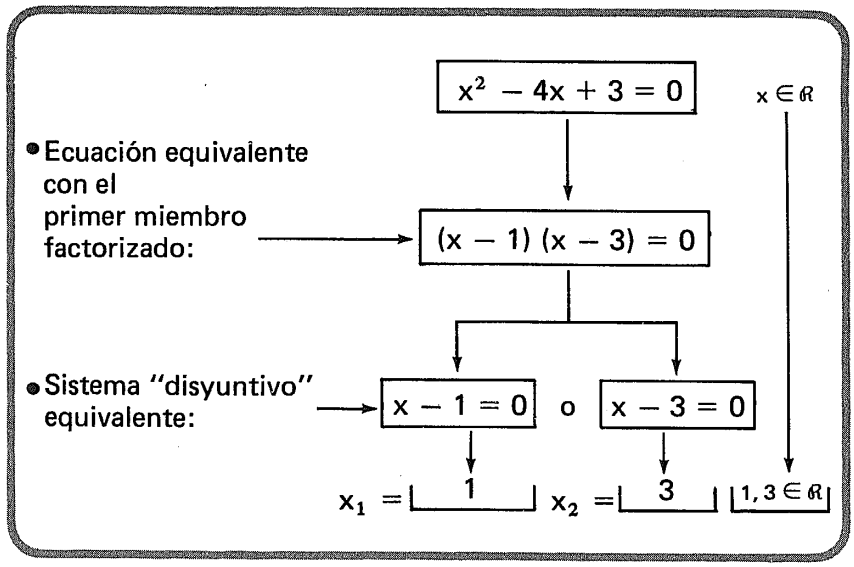
que vamos a resolver
mediante la

factorización del primer miembro.

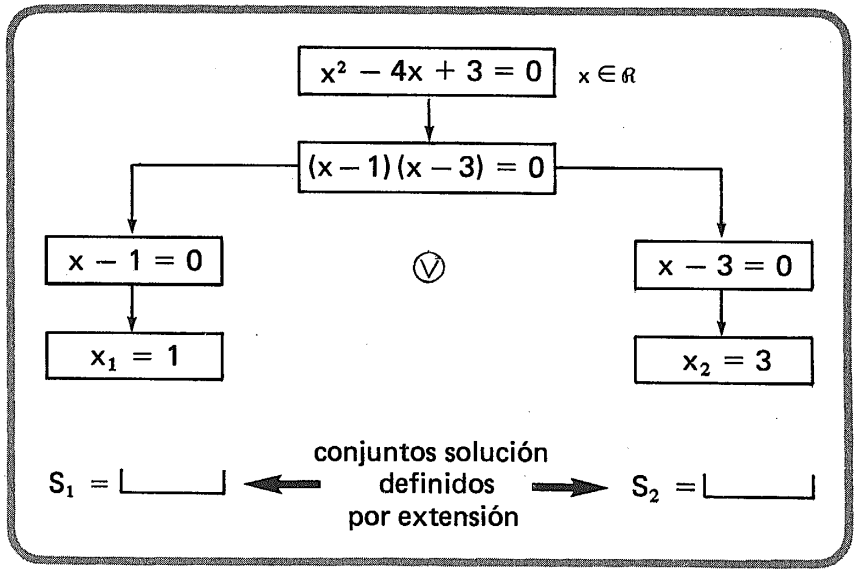
67



Respuesta
en el
cuadro siguiente

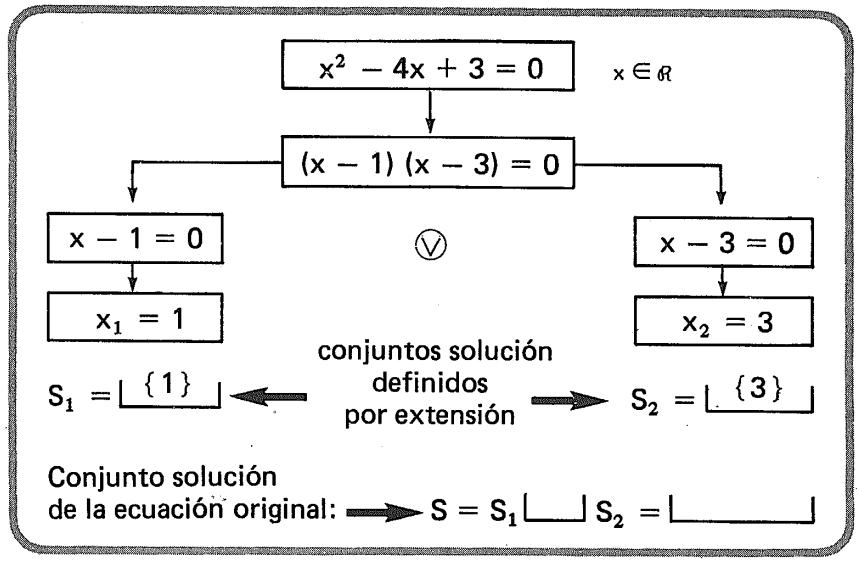


68



- $S_1 = \{1\}$
- $S_2 = \{3\}$

69



$S = S_1 \cup S_2 = \{1,3\}$

70

$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x - 1 = 0$ $\quad \vee$ $\quad x - 3 = 0$

$x_1 = 1$ $\quad x_2 = 3$

conjuntos solución definidos por extensión

$S_1 = \{1\}$ $\quad S_2 = \{3\}$

Conjunto solución de la ecuación original. $\quad S = S_1 \cup S_2 = \{1, 3\}$

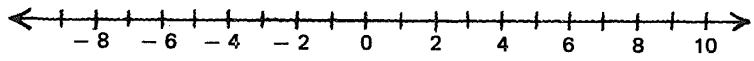
71

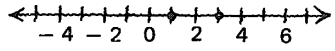
$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$S = \{1, 3\}$

Completar la representación gráfica del conjunto solución:





72

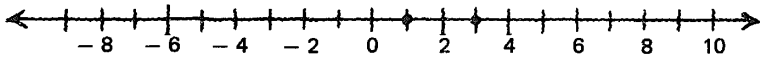
Veámoslo en conjunto:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$S = \{1, 3\}$

Representación gráfica del conjunto solución:



73

En la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$

cambiemos
ahora
el signo $=$
por
el signo $>$
para obtener
la desigualdad $x^2 - 4x + 3 > 0$

74

$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

Intentemos
resolver la
desigualdad resultante
tomando
como punto de partida
la misma idea
utilizada en la
solución de la ecuación.

Ver cuadro siguiente.

75

$\boxed{x^2 - 4x + 3 > 0} \quad x \in \mathbb{R}$

Desigualdad
equivalente
con el
primer miembro
factorizado:

$(x - 1)(x - 3) > 0$

76

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado

$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) > 0$

Atención.

Para que el producto de dos factores sea > 0 (es decir: **positivo**) se requiere que:

ambos factores sean **positivos** (> 0) $(\oplus \times \oplus = \oplus)$

o que

ambos factores sean **negativos** (< 0) $(\ominus \times \ominus = \oplus)$

77

Estudiar con mucha atención.

$x^2 - 4x + 3 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) > 0$

Podemos, entonces, sustituir la desigualdad $(x - 1)(x - 3) > 0$ por este

sistema equivalente

de cuatro desigualdades de primer grado.

$x - 1 > 0$ y $x - 3 > 0$ — **ambos factores positivos**

o

$x - 1 < 0$ y $x - 3 < 0$ — **ambos factores negativos**

78

$(x - 1)(x - 3) > 0$

$x \in \mathbb{R}$

① $x - 1 > 0$ y $x - 3 > 0$ (a, b)

o

(c, d) $x - 1 < 0$ y $x - < 0$ ②

Se trata de un **sistema disyuntivo** formado, a su vez, por **dos sistemas conjuntivos.**

79

Resolvamos el sistema conjuntivo ① :

$(x-1)(x-3) > 0$

$x \in \mathbb{R}$

① $\begin{cases} \boxed{x-1>0} \ ⓐ \\ x \ \_\_\_ \ \_\_\_ \\ y \\ \boxed{x-3>0} \ ⓑ \\ x \ \_\_\_ \ \_\_\_ \end{cases}$

- $S_a = \_\_\_\_\_$

como intervalos

- $S_b = \_\_\_\_\_$

- $x > 1$ • $(1,+\infty)$
- $x > 3$ • $(3,+\infty)$

80

$(x-1)(x-3) > 0$

$x \in \mathbb{R}$

① $\begin{cases} \boxed{x-1>0} \ ⓐ \\ x > 1 \\ y \\ \boxed{x-3>0} \ ⓑ \\ x > 3 \end{cases}$

- $S_a = \boxed{(1,+\infty)}$

como intervalos

- $S_b = \boxed{(3,+\infty)}$

$S_1 = S_a \ \_\_\_ \ S_b = \_\_\_\_\_$

$S_a \cap S_b = (3,+\infty)$

81

$(x-1)(x-3) > 0$

$x \in \mathbb{R}$

① $\begin{cases} \boxed{x-1>0} \ ⓐ \\ x > 1 \\ y \\ \boxed{x-3>0} \ ⓑ \\ x > 0 \end{cases}$

- $S_a = \boxed{(1,+\infty)}$

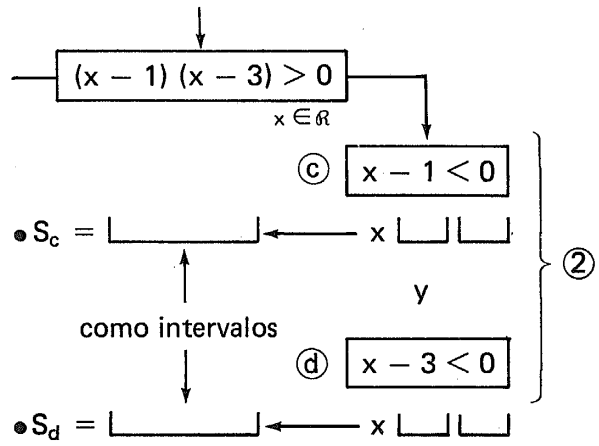
como intervalos

- $S_b = \boxed{(3,+\infty)}$

$S_1 = S_a \cap S_b = (3,+\infty)$

82

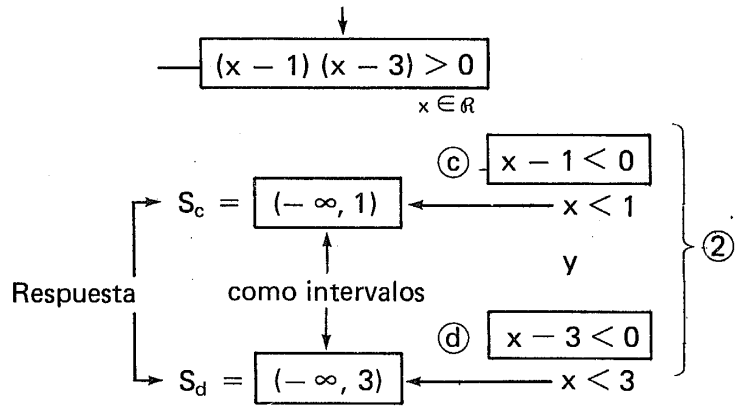
Resolvamos, ahora, el sistema conjuntivo②



- $x < 1$
- $S_c = (-\infty, 1)$

- $x < 3$
- $S_d = (-\infty, 3)$

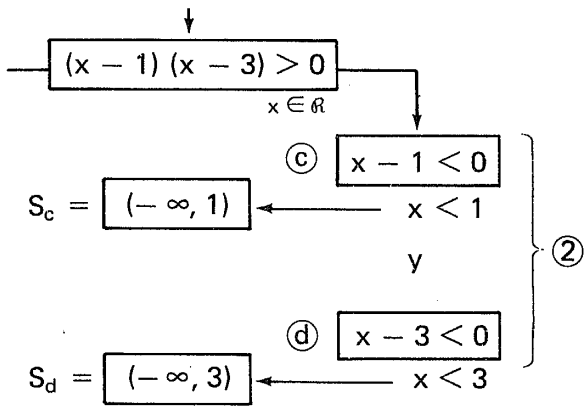
83



$S_2 = S_c \cap S_d =$

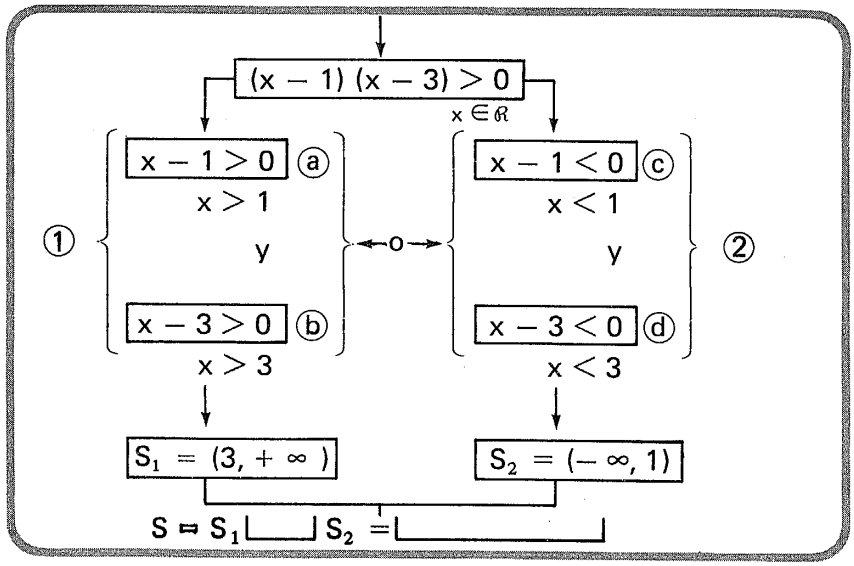
$S_c \cap S_d = (-\infty, 1)$

84



$S_2 = S_c \cap S_d = (-\infty, 1)$

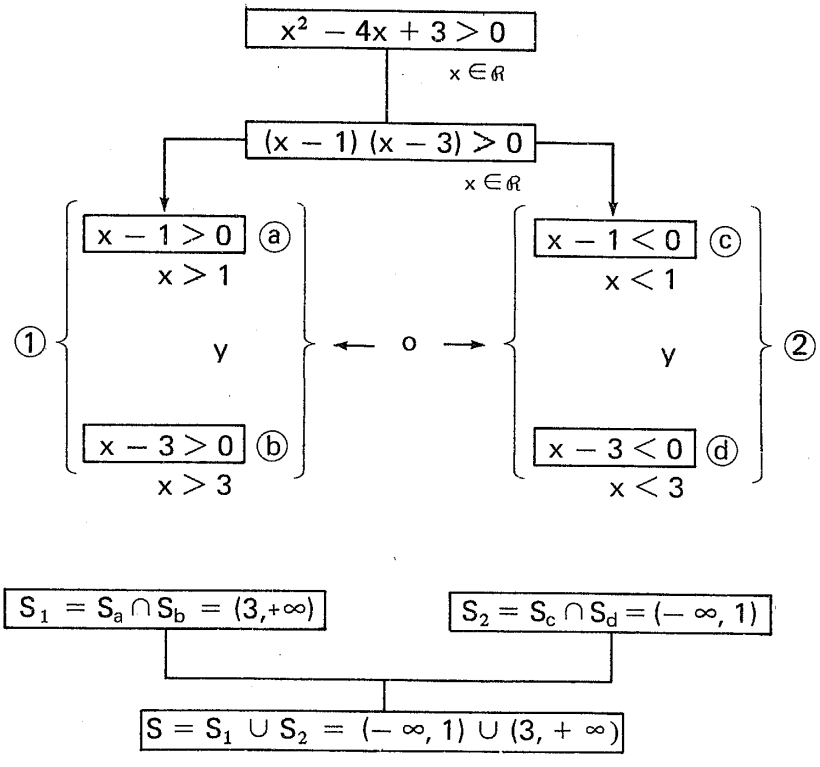
85



$S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

86

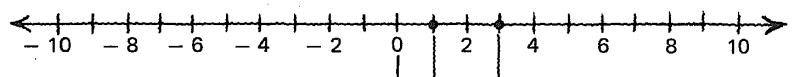
Estudiar con atención.



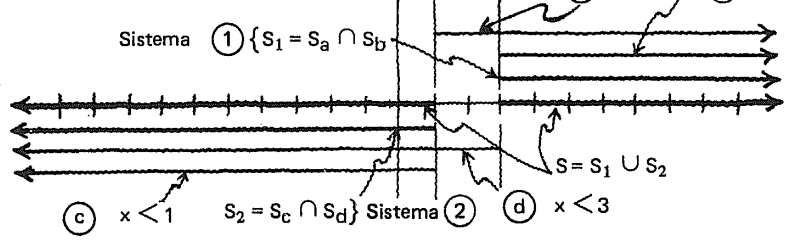
87

Tomemos nota cuidadosa de la representación gráfica de las soluciones.

- De la **ecuación** $x^2 - 4x + 3 = 0$ $x \in \mathbb{R}$



- De la desigualdad $x^2 - 4x + 3 > 0$ $x \in \mathbb{R}$ (a) $x > 1$ (b) $x > 3$



88

En la representación gráfica anterior observamos que

las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

sirven de

puntos de referencia

para la solución de la

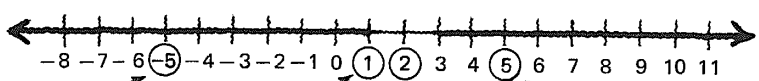
desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

89

- $x^2 - 4x + 3 > 0$ $x \in \mathbb{R}$ - solución: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Podemos comprobar el resultado por sustitución en la desigualdad de elementos pertenecientes al conjunto solución o a su complemento.



Por ejemplo:

$x = -5$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 5$
$(-5)^2 - 4(5) + 3 > 0$	$1^2 - 4(1) + 3 > 0$	$(2)^2 - 4(2) + 3 > 0$	$(5)^2 - 4(5) + 3 > 0$
$25 + 20 + 3 > 0$	$1 - 4 + 3 > 0$	$4 - 8 + 3 > 0$	$25 - 20 + 3 > 0$
$48 > 0$	$-3 + 3 > 0$	$-1 > 0$	$8 > 0$
↑ PCV	$0 > 0$ ↑ PCF	↑ PCF	↑ PCV

90

La solución de la desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

También puede expresarse como conjuntos definidos por comprensión, así:

$$S_a = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 1\} \qquad S_1 = S_a \cap S_b = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 3\}$$
$$S_b = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x > 3\}$$

$$S_c = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 1\} \qquad S_2 = S_c \cap S_d = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 1\}$$
$$S_d = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge (x < 1 \vee x > 3)\}$$

91

En la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ cambiemos ahora el signo $=$ por el signo $<$ para obtener la desigualdad $x^2 - 4x + 3 < 0$

92

Resolvamos esta desigualdad:

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Como primer paso expresemos la desigualdad dada como una

desigualdad equivalente

con el primer miembro factorizado.

$$(x - 1)(x - 3) < 0$$

93

Tenemos:

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$(x-1)(x-3) < 0$$

94

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$(x-1)(x-3) < 0$$

Atención.

Para que el producto de los factores A y B sea < 0
(es decir: **negativo**) se requiere que:

o que:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$(x-1)(x-3) < 0$$

Atención.

Para que el producto de dos factores A y B sea < 0
(es decir: **negativo**) se requiere que:

A sea positivo (> 0) y B negativo (< 0) $\quad \oplus \times \ominus = \ominus$

o que:

A sea negativo (< 0) y B positivo (> 0) $\quad \ominus \times \oplus = \ominus$

95

Por lo tanto, podemos sustituir la desigualdad $(x-1)(x-3)<0$ por este

$$\boxed{x^2-4x+3<0} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(x-1)(x-3)<0}$$

sistema equivalente →

de cuatro desigualdades de primer grado.

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\boxed{x^2-4x+3<0} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(x-1)(x-3)<0}$$

① $\boxed{x-1>0}$ ⓐ y $\boxed{x-3<0}$ ⓑ ← o → $\boxed{x-1<0}$ ⓒ y $\boxed{x-3>0}$ ⓓ ②

El primer factor **positivo** el segundo **negativo**

El primer factor **negativo** y el segundo **positivo**

96

Resolviendo el sistema ①

$$\boxed{(x-1)(x-3)<0}$$

$x \in \mathbb{R}$

① $\boxed{x-1>0}$ ⓐ

x ⌴ ⌴ • $S_a =$ ⌴

y

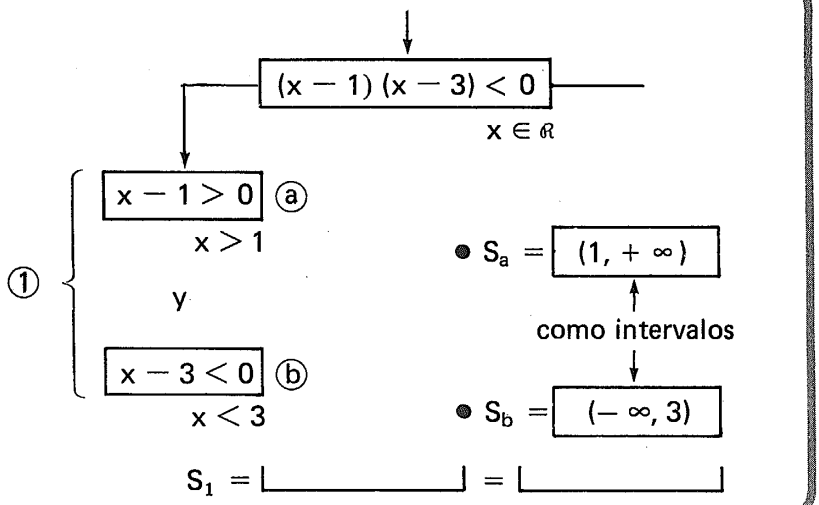
como intervalos

$\boxed{x-3<0}$ ⓑ

x ⌴ ⌴ • $S_b =$ ⌴

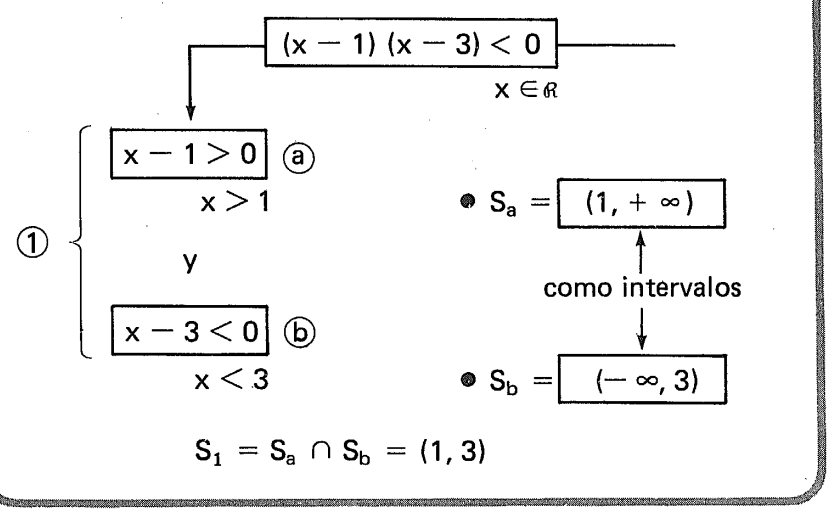
- $x > 1$
- $S_a = (1, +\infty)$
- $x < 3$
- $S_b = (-\infty, 3)$

97



$S_a \cap S_b = (1, 3)$

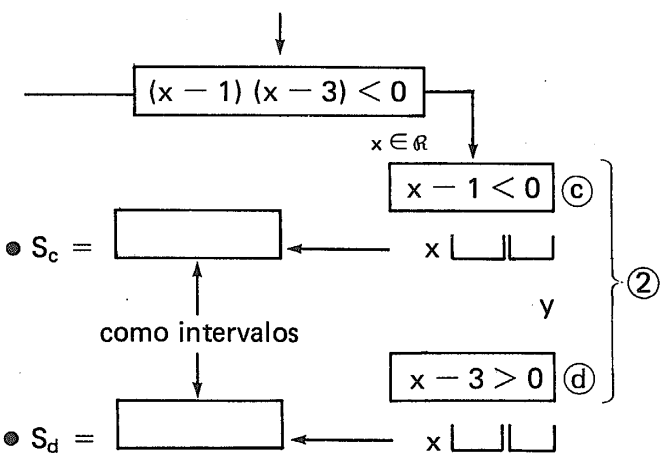
98



$S_1 = S_a \cap S_b = (1, 3)$

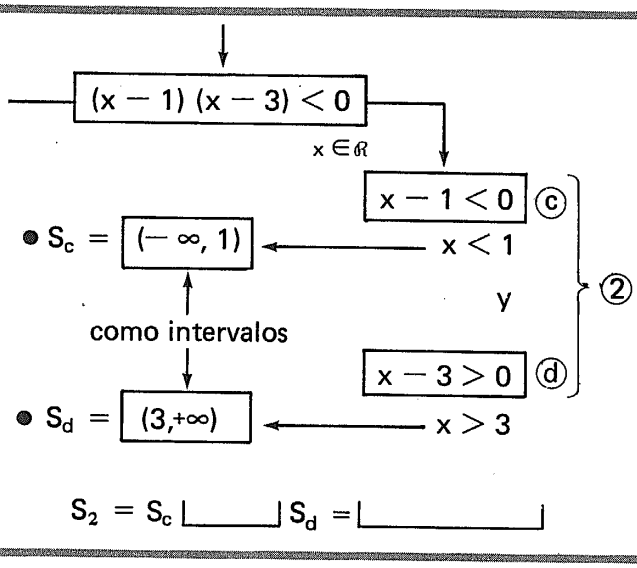
99

Resolviendo el sistema ② :



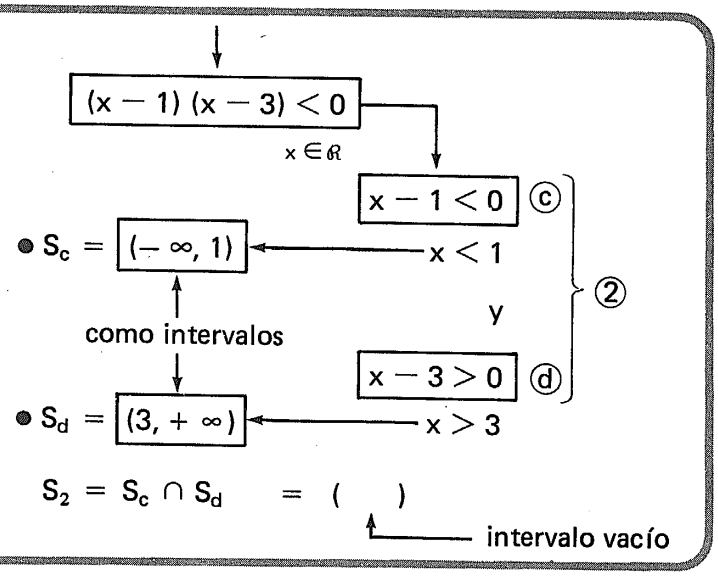
- $x < 1$
- $S_c = (- \infty, 1)$
- $x > 3$
- $S_d = (3, + \infty)$

100

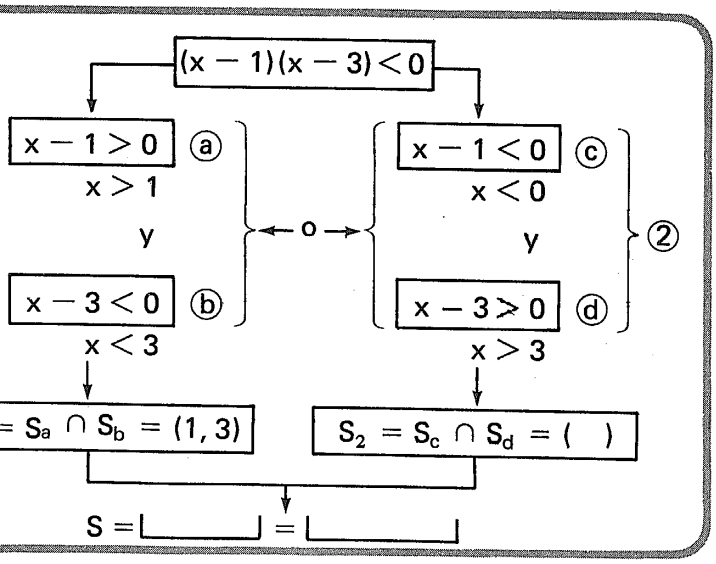


$S_c \cap S_d = (\quad)$

101



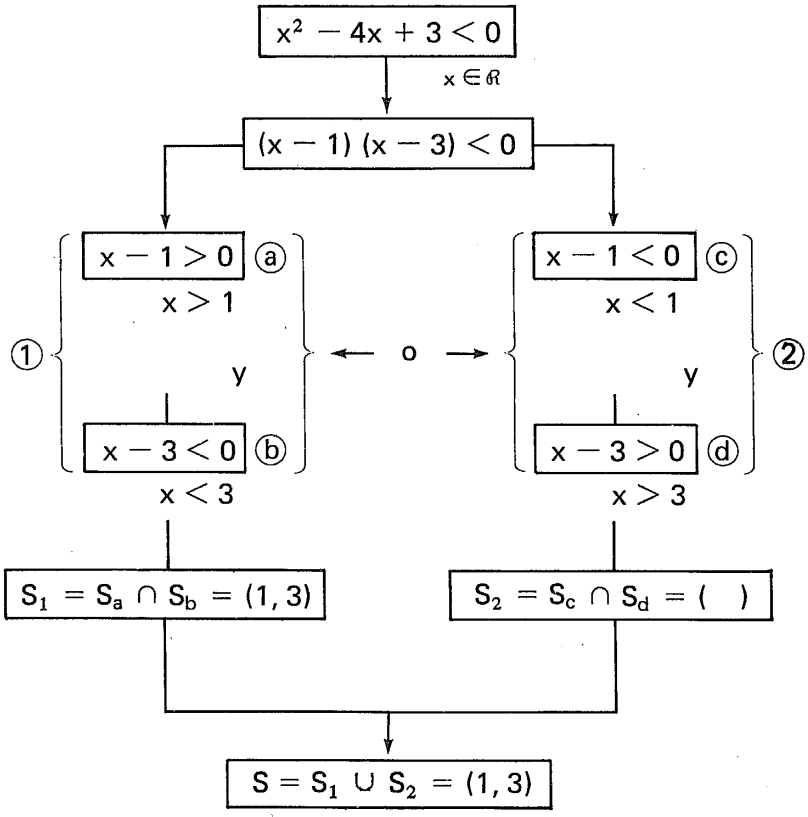
102



$S_1 \cup S_2 = (1, 3)$

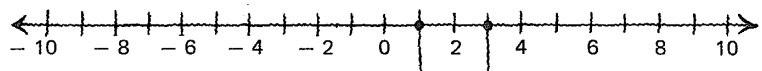
103

Estudiar con atención.

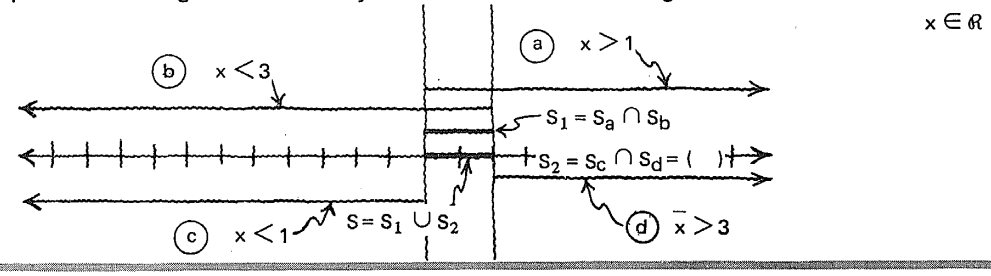


104

Representación gráfica del conjunto solución de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x \in \mathbb{R}$



Representación gráfica del conjunto solución de la desigualdad $x^2 - 4x + 3 < 0$, $x \in \mathbb{R}$



105

En la representación gráfica anterior podemos ver que

las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

sirven de

puntos de referencia

para la solución de la

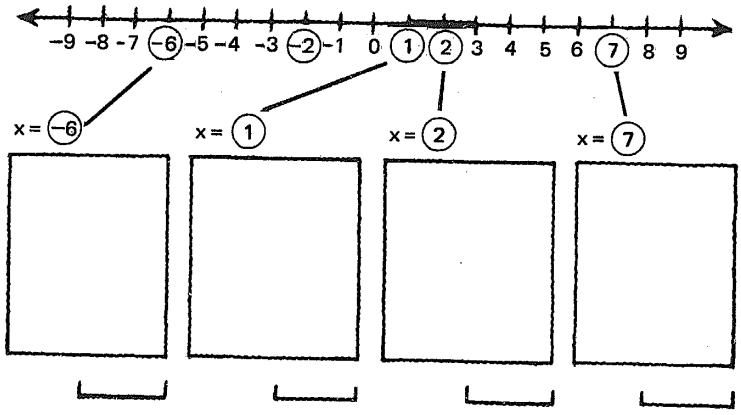
desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

106

• $x^2 - 4x + 3 < 0$ • solución: (1, 3)

$x \in \mathbb{R}$

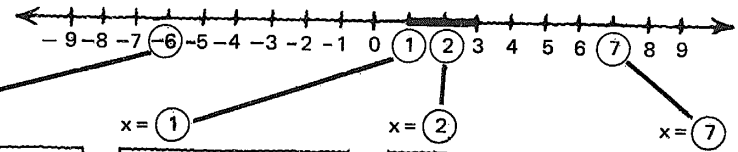


Respuesta en el cuadro siguiente

• $x^2 - 4x + 3 < 0$ • solución: (1, 3)

$x \in \mathbb{R}$

Comprobación:



$x = -6$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 7$
$(-6)^2 - 4(-6) + 3 < 0$	$(1)^2 - 4(1) + 3 < 0$	$(2)^2 - 4(2) + 3 < 0$	$(7)^2 - 4(7) + 3 < 0$
$36 + 24 + 3 < 0$	$1 - 4 + 3 < 0$	$4 - 8 + 3 < 0$	$49 - 28 + 3 < 0$
$63 < 0$	$0 < 0$	$-1 < 0$	$24 < 0$
PCF	PCF	PCV	PCF

107

La solución de la desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$

expresada como conjuntos definidos por comprensión:

$S_a = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S_b = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S_c = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S_d = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S_1 = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S_2 = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$S = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

Respuesta en el cuadro siguiente

La solución de la desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \qquad x \in \mathcal{R}$$

expresada como conjuntos definidos por comprensión.

$S_a = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x > 1 \}$

$S_b = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x < 3 \}$

$S_1 = S_a \cap S_b = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge 1 < x < 3 \}$

$S_c = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x < 1 \}$

$S_d = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge x > 3 \}$

$S_2 = S_c \cap S_d = \phi$

$S = S_1 \cup S_2 = \{ x/x \in \mathcal{R} \wedge 1 < x < 3 \}$

108

$x^2 - 4x + 3 \textcircled{=} 0$

Resolvamos ahora la desigualdad

$x^2 - 4x + 3 \textcircled{\geqslant} 0$

109

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado:

$(x - 1)(x - 3) \geqslant 0$

110

$$\boxed{x^2 - 4x + 3 \geq 0} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(x-1)(x-3) \geq 0}$$

Atención.

Para que el producto de dos factores A y B sea ≥ 0 (es decir: **positivo o cero**) se requiere que:

Respuesta en el cuadro siguiente

$A \cdot B \geq 0$

Para que el producto de dos factores sea ≥ 0 (es decir: **positivo o cero**) se requiere que:

ambos factores sean *positivos o nulos* (≥ 0)

$A \geq 0$ y $B \geq 0$

o que

ambos factores sean **negativos o nulos** (≤ 0)

$A \leq 0$ y $B \leq 0$

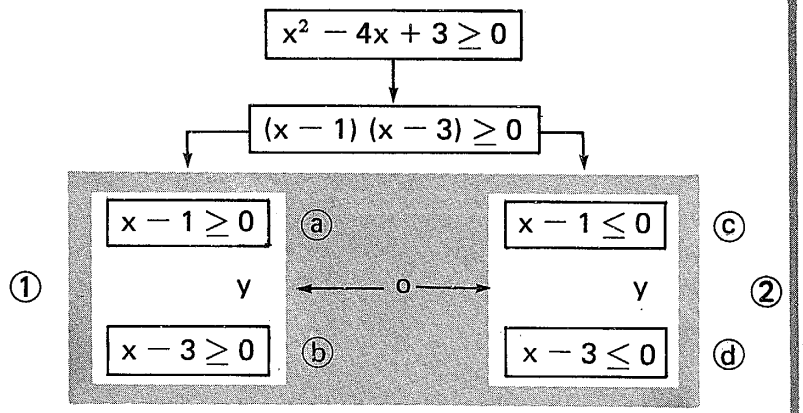
111

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$(x - 1)(x - 3) \geq 0$

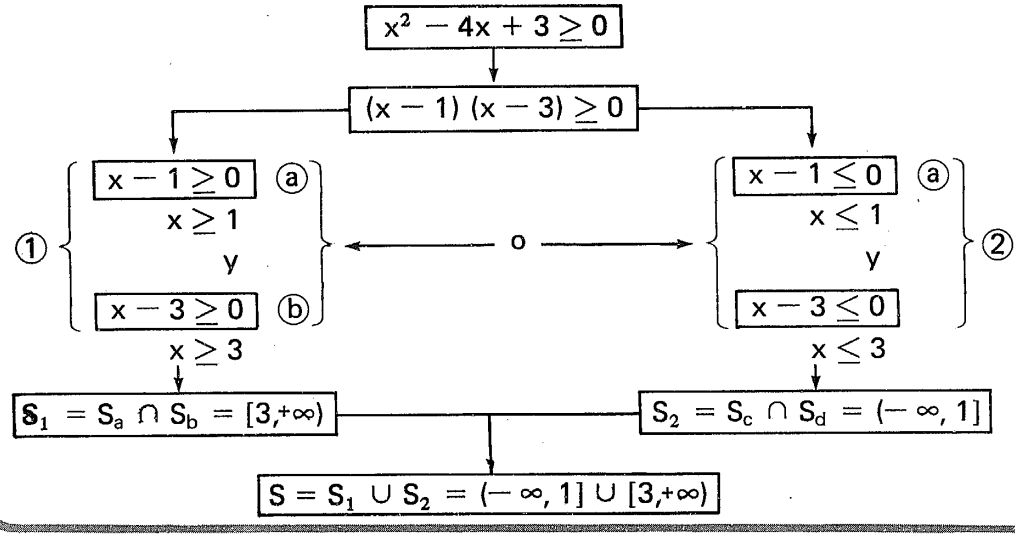
Sistema equivalente de 4 desigualdades de primer grado:

Respuesta en el cuadro siguiente



Completar la solución y compararla con la respuesta proporcionada en el cuadro siguiente.

112



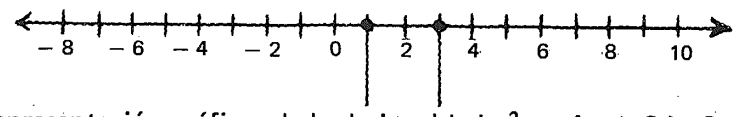
113

Representación gráfica de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$
$x \in \mathbb{R}$

Representación gráfica de la desigualdad $x^2 - 4x + \geq 0$
$x \in \mathbb{R}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Representación gráfica de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$
$x \in \mathbb{R}$



Representación gráfica de la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
$x \in \mathbb{R}$

114

Como en los casos anteriores,
observamos que
las raíces de la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

sirven de
puntos de referencia
para la solución de la
desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

115

También debemos observar la

similitud

en la solución de las desigualdades:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

y

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

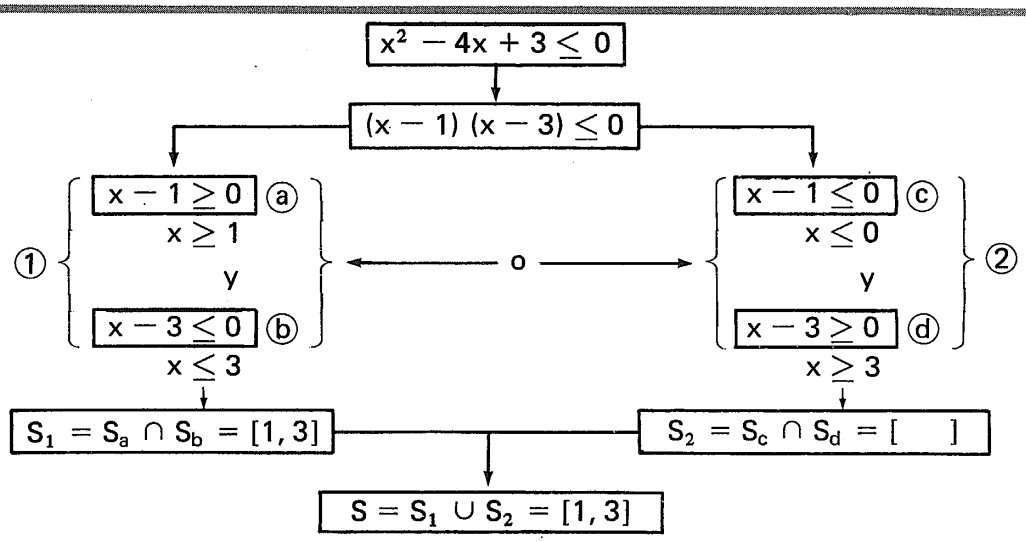
116

Resolvamos, ahora la desigualdad

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

y comparemos el resultado obtenido con la respuesta proporcionada en el cuadro siguiente.

117



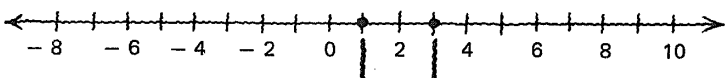
118

Representación gráfica de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$
$x \in \mathbb{R}$

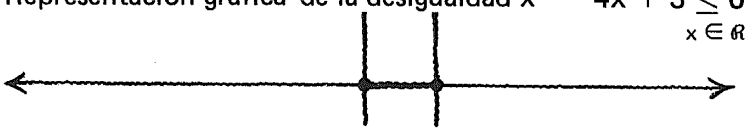
Representación gráfica de la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
$x \in \mathbb{R}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Representación gráfica de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$
$x \in \mathbb{R}$

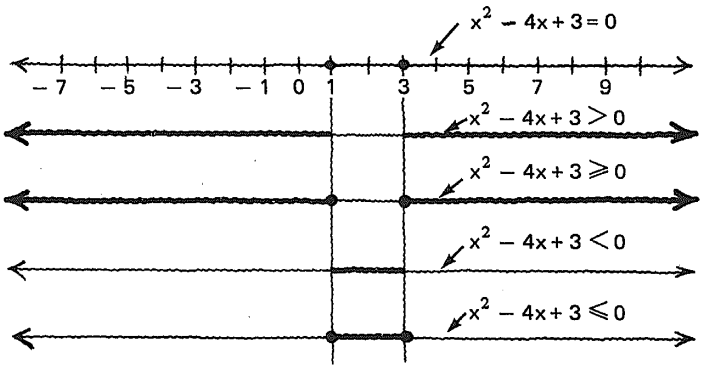


Representación gráfica de la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
$x \in \mathbb{R}$



119

Resumen gráfico: $x \in \mathbb{R}$



2.6.3.1

Práctica adicional de resolución
de desigualdades de la forma
$ax^2\ bx + c \leqslant 0$
en que el primer miembro
es factorizable en $\mathbb{Z}$,
por simple inspección,
si
se considera necesario

2.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ con el primer miembro factorizable en $\mathbb{Z}$, por simple inspección;
- *comprobar* los resultados obtenidos por sustitución de elementos del conjunto solución o de su complemento;
- *representar* gráficamente la solución.

6.4

Solución de desigualdades de segundo grado.
Factorización en $\mathbb{R}$

120

Se requiere resolver la desigualdad

$$3x^2 + 4x - 1 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

en que
el primer miembro

no es factorizable

en $\mathbb{Z}$

por simple inspección

como en los casos antes estudiados.

121

$$3x^2 + 4x - 1 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Recordemos que
el trinomio cuadrático $3x^2 + 4x - 1$
puede ser factorizado
por el procedimiento de

completar un trinomio cuadrado perfecto

estudiado en conexión con
las ecuaciones de segundo grado.

122

Factoricemos el trinomio

$$3x^2 + 4x - 1$$

por el procedimiento de completar un trinomio cuadrado perfecto.

1. Expresemos el trinomio como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2:

$$\square \cdot \square$$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

123

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

2. Sumemos y restemos a la expresión que está entre paréntesis un término t^2, de tal manera que los primeros tres términos constituyan un **trinomio cuadrado perfecto**:

$$3\Big(\underbrace{x^2 + \frac{4}{3}x + t^2 - t^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}} - \frac{1}{3}\Big)$$

En este caso:

$$t^2 = \square$$

$\frac{4}{9}$

puesto que:

$$\frac{4}{3}x = 2 \cdot x \cdot t$$

$$t = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$$

$$t^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

124

$$3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right)$$

3. Factoricemos el trinomio cuadrado perfecto resultante:

$$\square$$

$$3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right]$$

125

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right]$$

4. Efectuemos la suma de los últimos términos de la expresión entre corchetes:

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right]$$

126

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{9}\right]$$

5. **Factoricemos** la expresión que está entre corchetes como una diferencia de cuadrados, recordando que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{\sqrt{7}}{3}\right]\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$$

127

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{\sqrt{7}}{3}\right]\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)-\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$$

6. Reagrupemos los términos, como lo sugieren los vínculos y simplifiquemos la expresión resultante.

Estado final: ⌊_____⌋

$$3\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$$

128

Estado inicial:

$$3x^2+4x-1$$

Estado final:

$$3\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)$$

129

Desarrollaremos ahora
un procedimiento sencillo para

factorizar cualquier trinomio cuadrático

de la forma

$$ax^2+bx+c$$

130

Se requiere factorizar

estado inicial $\longrightarrow$ $ax^2 + bx + c$

Expresemos el trinomio dado, como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

131

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Recordemos que el trinomio entre paréntesis puede ser expresado como el producto de dos factores de la forma:

$$(x + \underline{n})\,(x + \underline{m})$$

132

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$a\,(x + \underline{n})\,(x + \underline{m})$$

Recordemos también, que:

$n + m = \underline{\qquad\qquad}$

$n \cdot m = \underline{\qquad\qquad}$

$\frac{b}{a}$

$\frac{c}{a}$

133

Ahora, resolvamos el sistema $\begin{cases} n + m = \frac{b}{a} \rightarrow ① \\ n \cdot m = \frac{c}{a} \rightarrow ② \end{cases}$

De la ecuación ②:

$n =$ [ ]

$\frac{c}{am}$

134

$n + m = \frac{b}{a} \rightarrow ①$

$n \cdot m = \frac{c}{a} \rightarrow ②$

Sustituyamos la expresión para n en la ecuación ①:

[ ]

$\frac{c}{am} + m = \frac{b}{a}$

135

Resolvamos para m la ecuación resultante:

$\frac{c}{am} + m = \frac{b}{a}$

Multiplicando por m ambos miembros, obtenemos:

[ ]

$\frac{c}{a} + m^2 = \frac{bm}{a}$

136

$$\frac{c}{a} + m^2 = \frac{bm}{a}$$

Si restamos el término $\frac{bm}{a}$

a ambos miembros, obtendremos:

$$\frac{c}{a} + m^2 - \frac{bm}{a} = 0$$

Al ordenar en forma decreciente para las potencias de m, obtenemos:

$$m^2 - \frac{b}{a}m + \frac{c}{a} = 0$$

137

$$m^2 - \frac{b}{a}m + \frac{c}{a} = 0$$

Si expresamos la anterior como una ecuación equivalente sin denominadores, obtendremos:

$$am^2 - bm + c = 0$$

138

$$am^2 - bm + c = 0$$

Ahora, resolvamos para m, mediante la aplicación de la fórmula cuadrática.

$$m = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

139

En el sistema $\begin{cases} n+m=\frac{b}{a} \rightarrow ① \\ n\cdot m=\frac{c}{a} \rightarrow ② \end{cases}$

si $m_1 = \dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad n_1 =$ [ ]

y

si $m_2 = \dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad n_2 =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Atención.

$n_1 = \frac{b}{a} - m_1$

$n_1 = \frac{b}{a} - \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$n_1 = \frac{2b-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

● $n_1 = \dfrac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$n_2 = \frac{b}{a} - m_2$

$n_2 = \frac{b}{a} - \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$n_2 = \frac{2b-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

● $n_2 = \dfrac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

140

Atención.

Sustituyamos en:

$$a(x+n)(x+m)$$

los valores obtenidos para n y m:

$$a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

o bien:

$$a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

141

Atención.

Estado inicial: $\boxed{ax^2 + bx + c}$

$$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Observemos que:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son las dos raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
que podemos simbolizar como x_1 y x_2.

Por lo tanto: $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$ ← Estado final

142

Atención.

Estado inicial: $\boxed{ax^2 + bx + c}$

↓

Estado final: $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$

siendo
x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

143

Entonces
para factorizar el trinomio $ax^2 + bx + c$
el procedimiento
consistirá en
determinar las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
por medio de la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

y
sustituirlas en la expresión $a(x - x_1)(x - x_2)$

144

Por ejemplo:

Factorizar $\longrightarrow 12x^2 + 5x - 2$

$\downarrow$

$12(x\square)(x\square)$

Resolución de la ecuación

$12x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{24}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{24}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{24}$$

Raíces de la ecuación:

$$x_1 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$$

Sustituyendo en el modelo

$a(x - x_1)(x - x_2)$

$$12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

145

$12x^2 + 5x - 2$

$\downarrow$

$$12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$\downarrow$

Comprobación:

$$x - \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{2}{3}$$

$$x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$+ \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$$

$$x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{6}$$

$$12\left(x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{6}\right)$$

$$12x^2 + 5x - 2$$

146

Factorizar: $\longrightarrow 5x^2 + 5x - 30$

$\downarrow$

Resolución de la ecuación $5x^2 + 5x - 30$: $\longrightarrow$

$\downarrow$

Sustitución de las raíces de la ecuación en el modelo: $\longrightarrow \square$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{10}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{625}}{10}$$

$$x = \frac{-5 \pm 25}{10}$$

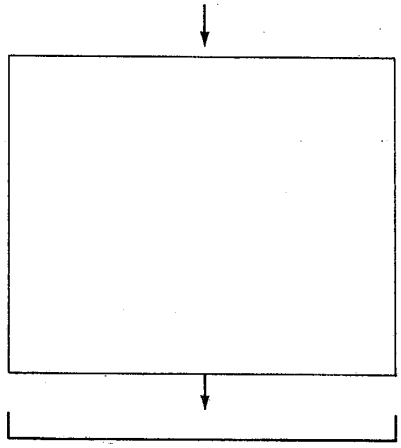
$$x_1 = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_2 = \frac{-30}{10} = -3$$

$$5(x - 2)(x + 3)$$

147

Factorizar: $3x^2 + 2x - 1$



$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

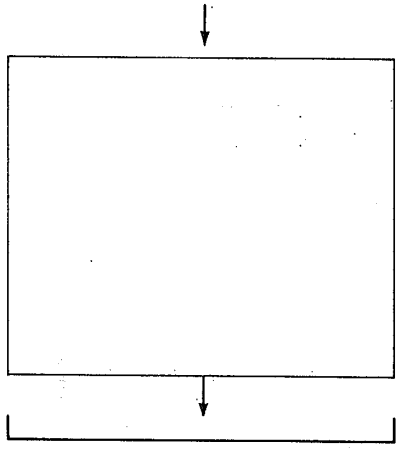
$$x_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-6}{6} = -1$$

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$$

148

Factorizar: $2x^2 - 7x + 4$



$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{7 - \sqrt{17}}{4}$$

- $2\left(x - \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{17}}{4}\right)$

2.6.4.1

Práctica adicional,
si se considera necesario,
de factorización de
trinomios de la forma
$ax^2 + bx + c$
en que
$b^2 - 4ac \geq 0$

149

De nuevo,
consideremos la desigualdad

$$3x^2 + 4x - 1 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

que
se requiere resolver.
Desigualdad equivalente
con el primer miembro
factorizado: ⟶ [ ]

$$3\left(x+\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)>0$$

150

$$3x^2 + 4x - 1 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Desigualdad
equivalente
con el
primer miembro
factorizado:

$$3\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) > 0$$

Desigualdad equivalente
que resulta de multiplicar
ambos miembros por $\frac{1}{3}$: [ ]

$$\left(x+\frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)>0$$

151

$$3x^2 + 4x - 1 > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) > 0$$

$$\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) > 0$$

152

Completaremos ahora la solución utilizando el método estudiado en la sección 3 de este módulo.

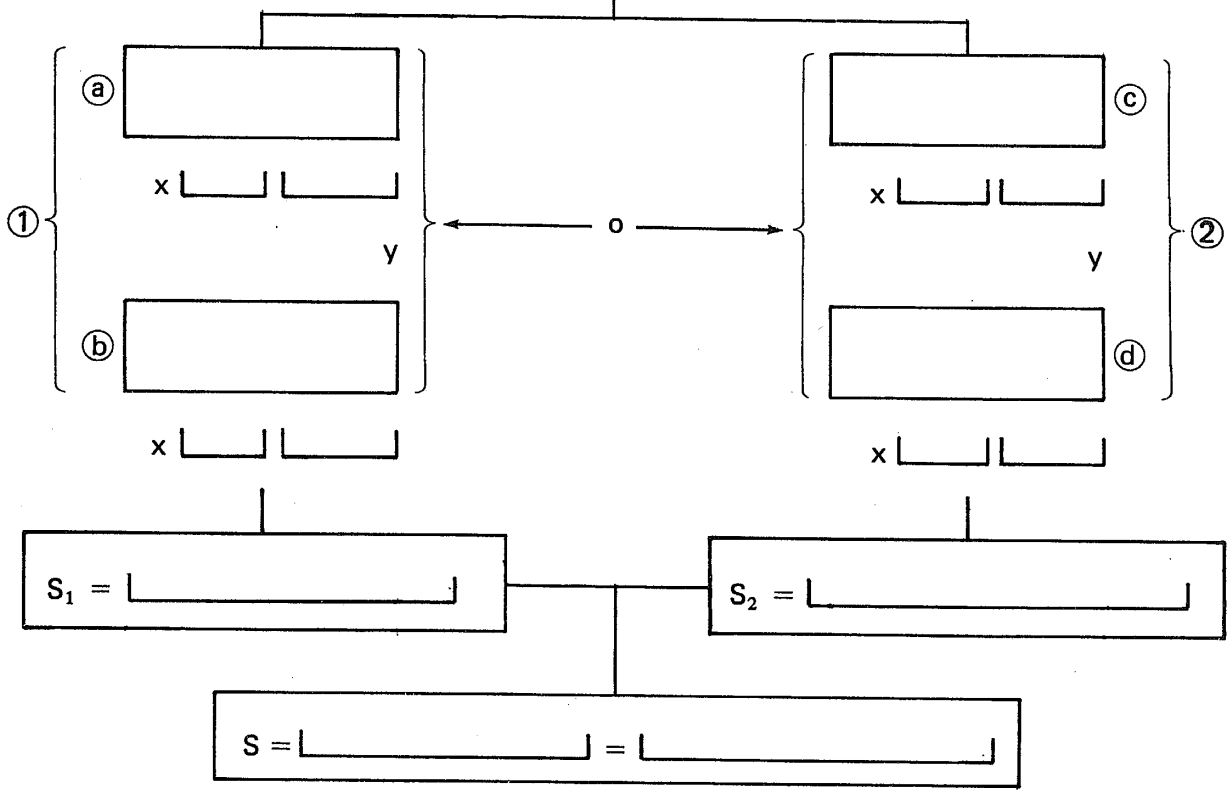
Ver cuadro siguiente.

153

$3x^2 + 4x - 1 > 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado:

$$\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) > 0$$



Respuesta en el cuadro siguiente.

$3x^2 + 4x - 1 > 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado:

$$\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) > 0$$

① ⓐ $x + \frac{2-\sqrt{7}}{3} > 0$ $\quad x > \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

y

ⓑ $x + \frac{2+\sqrt{7}}{3} > 0$ $\quad x > \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$

o

② ⓒ $x + \frac{2-\sqrt{7}}{3} < 0$ $\quad x < \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

y

$x + \frac{2+\sqrt{7}}{3} < 0$ $\quad x < \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$

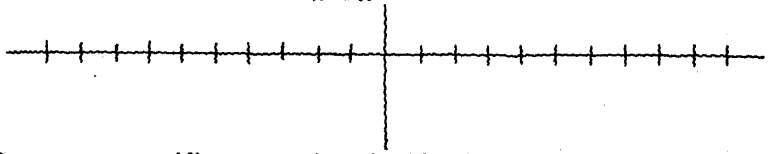
$$S_1 = S_a \cap S_b = \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$$

$$S_2 = S_c \cap S_d = \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right)$$

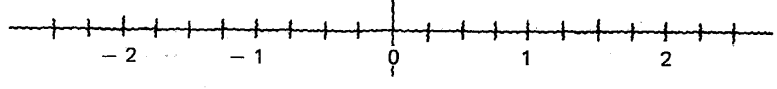
$$S = S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$$

154

Representar gráficamente la solución de la ecuación $3x^2 + 4x - 1 = 0$: $\quad x \in \mathbb{R}$

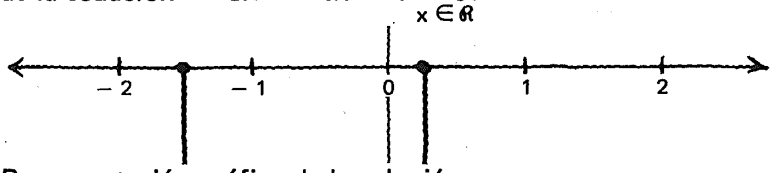


Representar gráficamente la solución de la desigualdad $3x^2 + 4x - 1 > 0$: $\quad x \in \mathbb{R}$

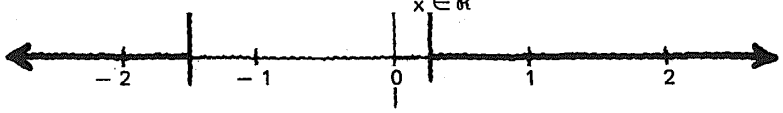


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de la solución
de la ecuación $3x^2 + 4x - 1 = 0$:
$x \in \mathbb{R}$



Representación gráfica de la solución
de la desigualdad $3x^2 + 4x - 1 > 0$:
$x \in \mathbb{R}$



155

No perdamos de vista
la posibilidad de **comprobar**
la solución de una desigualdad,
sustituyendo en ella
números del conjunto solución
y de su complemento,
empezando con
los "elementos fronterizos".

Obviamente,
los elementos el conjunto solución
deberán satisfacer la desigualdad,
y los del complemento, no.

156

Así, para la comprobación de la
desigualdad anterior,
empezaríamos por sustituir los números

$$\frac{-2-\sqrt{7}}{3} \text{ y } \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$$

que, en este caso, no pertenecen al conjunto solución.

Enseguida podríamos tomar
dos números del conjunto solución,
por ejemplo: -2 y 1.

Finalmente, tomaríamos
un número del complemento del conjunto solución
tal como 0.

157

Resolver: $9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$ $x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente con el primer miembro expresado como un **producto de dos factores:** → $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \leqslant 0$

158

Completar la solución de: $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \leq 0$

① { ⓐ x ⌊_⌋⌊_⌋ y ⓑ x ⌊_⌋⌊_⌋ } o ② { ⓒ x ⌊_⌋⌊_⌋ y ⓓ x ⌊_⌋⌊_⌋ }

$S_1 =$ $S_2 =$

$S =$ $=$

Respuesta en el cuadro siguiente.

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado:

$9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \leq 0$

① { ⓐ $x - \frac{2}{3} \geqslant 0$ $\quad x \geq 2/3$; ⓒ $x - \frac{2}{3} \leq 0$ $\quad x \leq 2/3$ } o ② { ⓑ $x - \frac{2}{3} \leqslant 0$ $\quad x \leq 2/3$; ⓓ $x - \frac{2}{3} \geq 0$ $\quad x \geq 2/3$ }

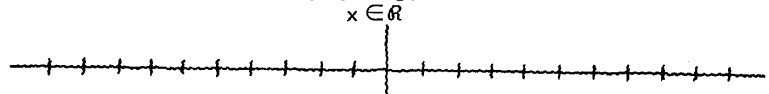
$S_1 = S_a \cap S_b = [2/3, 2/3]$

$S_2 = S_c \cap S_d = [2/3, 2/3]$

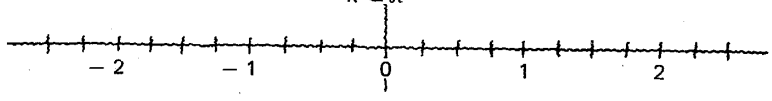
$S = S_1 \cup S_2 = [2/3, 2/3]$

159

Representar gráficamente la solución de la ecuación $9x^2 - 12x + 4 = 0$: $\quad x \in \mathbb{R}$

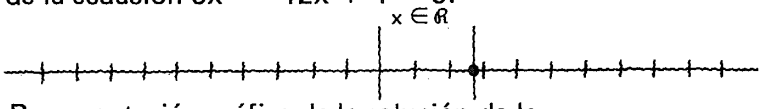


Y la de la desigualdad $9x^2 - 12x + \leq 0$: $\quad x \in \mathbb{R}$

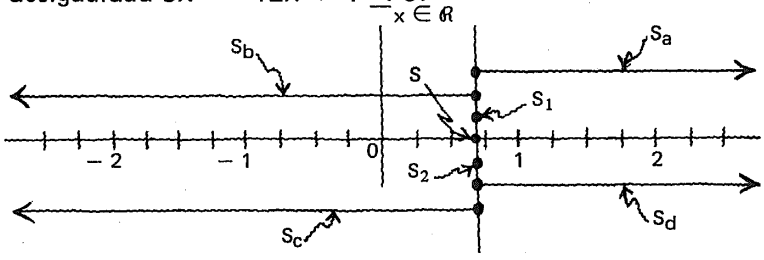


Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de la solución de la ecuación $9x^2 - 12x + 4 = 0$:



Representación gráfica de la solución de la desigualdad $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$:



2.6.4.2

Práctica adicional, si se considera necesario, de resolución de desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \geq 0$ en que el primer miembro es factorizable en $\Re$.

2.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ con el primer miembro factorizable en $\Re$.

6.5

Solución de desigualdades de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c \gtrless 0$; primer miembro no factorizado en $\mathbb{R}$

160

Resolver: $3x^2 + 2x + 1 \geq 0$ $x \in \mathbb{R}$

Desigualdad equivalente con el primer miembro factorizado en $\mathbb{R}$: ____

Véase cuadro siguiente

161

El primer miembro
no es factorizable en $\mathbb{R}$
(aunque sí lo es en $\mathbb{C}$)
por lo tanto,
si deseamos la solución en $\mathbb{R}$
no podemos seguir
utilizando el procedimiento estudiado.

162

$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

Veamos qué pasa si $x = 0$:

$3(0)^2 + 2(0) + 1 \geq 0$

$1 \geq 0$

PCV

163

$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

Observamos que

la desigualdad se satisface

para $x = 0$.

164

$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

Es imposible

sustituir todos los números reales

para saber cuáles satisfacen la desigualdad y cuáles no.

165

Atención.

$$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Afortunadamente, se
puede demostrar que

**si cero satisface la desigualdad
entonces todos los números reales
la satisfacen.**

166

Hemos visto que:

cero satisface la desigualdad

$$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Entonces,
de acuerdo con lo
enunciado en el cuadro anterior,

su conjunto solución es:

└_____┘

$\mathbb{R}$

167

$$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

Diremos que $S = \mathbb{R}$

porque

$$3x^2 + 2x + 1$$

no es factorizable en $\mathbb{R}$

y

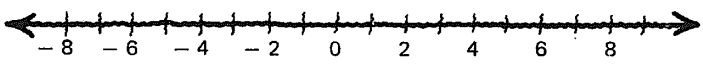
0 es solución de la desigualdad.

168

$$3x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$S = \mathbb{R}$$

Representado gráficamente:



Por curiosidad
sustituyamos cualquier número real
que se nos ocurra,
en la desigualdad dada.

Respuesta abierta

169

Consideremos ahora la desigualdad

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0$$
$$x \in \mathbb{R}$$

y veamos qué pasa si $x = 0$.

$$3(0)^2 + 2(0) + 1 \leq 0$$

$$1 \leq 0$$

PCF

170

Señalar la opción correcta.

Observamos que la desigualdad

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0$$
$$x \in \mathbb{R}$$

[ ]
se satisface/no se satisface

para $x = 0$.

No se satisface

171

También puede ser
demostrado que:

si cero no satisface una desigualdad

entonces

ningún número real la satisface.

172

Entonces, como

0 no satisface la desigualdad

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0,$$

de acuerdo con lo que se
afirma en el cuadro anterior,

su **conjunto solución** es:

$\llcorner\!\!\lrcorner$

ϕ

173

$$3x^2 + 2x + 1 \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$S = \phi$$

porque

$$3x^2 + 2x + 1$$

no es factorizable en $\mathbb{Z}$

y

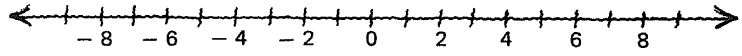
0 no es solución de la desigualdad.

174

$3x^2 + 2x + 1 \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

$S = \phi$

Representado gráficamente



Por curiosidad, sustituyamos en la desigualdad cualquier número real que se nos ocurra.

Respuesta abierta

175

Ahora bien,
¿cómo podríamos saber rápidamente si un trinomio de la forma

$ax^2 + bx + c$

es o no es

factorizable en $\mathbb{R}$?

176

Atención

Primero recordemos que,
dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$
   entonces

   la ecuación tiene dos raíces diferentes

   en $\mathbb{R}$

   y el trinomio $ax^2 + bx + c$

   es/no es factorizable en $\mathbb{R}$.

es

177

2. Si $b^2 - 4ac = 0$

entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

tiene [ ] raíces [ ]

y el trinomio $ax^2 + bx + c$

[ ] factorizable en $\mathcal{R}$.
es/no es

- dos
- reales iguales (o una raíz real)
- es

178

3. Si $b^2 - 4ac < 0$

entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

tiene [ ]

y el trinomio $ax^2 + bx + c$

[ ] factorizable en $\mathcal{R}$.
es/no es

- dos raíces complejas no reales

  o

  no tiene raíces en $\mathcal{R}$

- no es

179

Entonces, dada una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0$ $\quad x \in \mathcal{R}$

1. Si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, entonces $ax^2 + bx + c$ es factorizable en $\mathcal{R}$ y **el conjunto solución puede ser determinado por factorización.**

2. Si $b^2 - 4ac < 0$ y 0 satisface la desigualdad entonces el conjunto solución es $\mathcal{R}$.

3. Si $b^2 - 4ac < 0$ y 0 no satisface la desigualdad entonces **el conjunto solución es** ϕ .

180

Por lo tanto ,
podemos bosquejar el siguiente

procedimiento general

para determinar

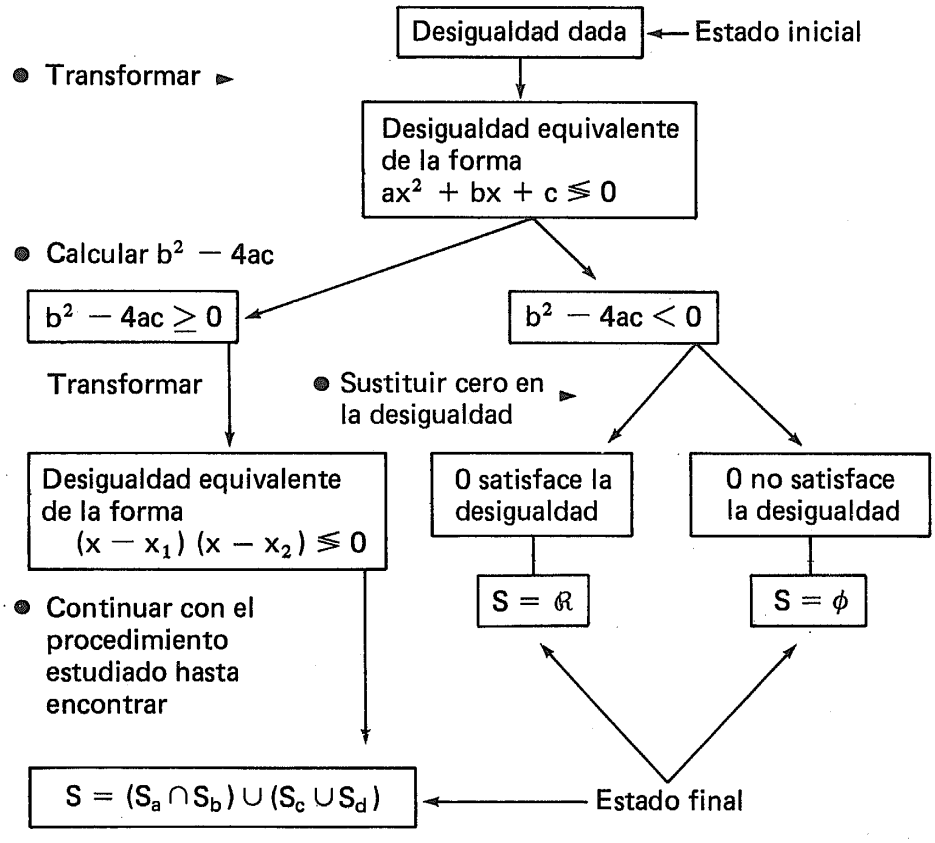
el conjunto solución

de una

desigualdad de segundo grado.

181

Estudiar con atención este esquema



182

Ejemplo 1.

Resolver: $5x^2 + x > -1 \quad x \in \mathbb{R}$

- Transformar en una desigualdad equivalente de la forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:

↓

[ ]

$5x^2 + x + 1 > 0$

183

$\boxed{5x^2 + x > -1} \quad x \in \mathbb{R}$

↓

$\boxed{5x^2 + x + 1 > 0}$

- Calcular $b^2 - 4ac =$ [ ]

y tachar la opción que no corresponda a la respuesta:

$\boxed{b^2 - 4ac \geq 0}$ $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$

Respuesta en el cuadro siguiente

$\boxed{5x^2 + x > -1} \quad x \in \mathbb{R}$

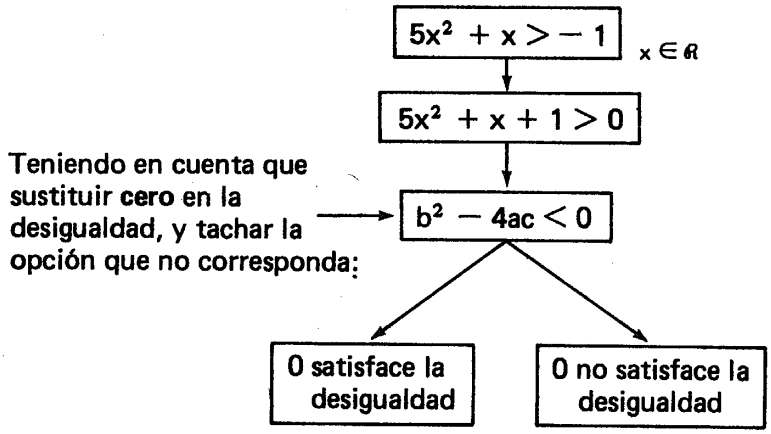
↓

$\boxed{5x^2 + x + 1 > 0}$

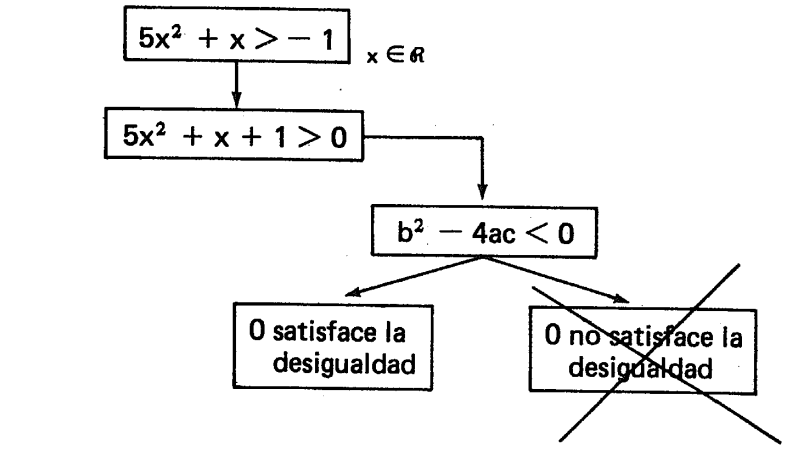
$b^2 - 4ac = 1 - 20 = -19$

~~$\boxed{b^2 - 4ac \geqslant 0}$~~ $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$

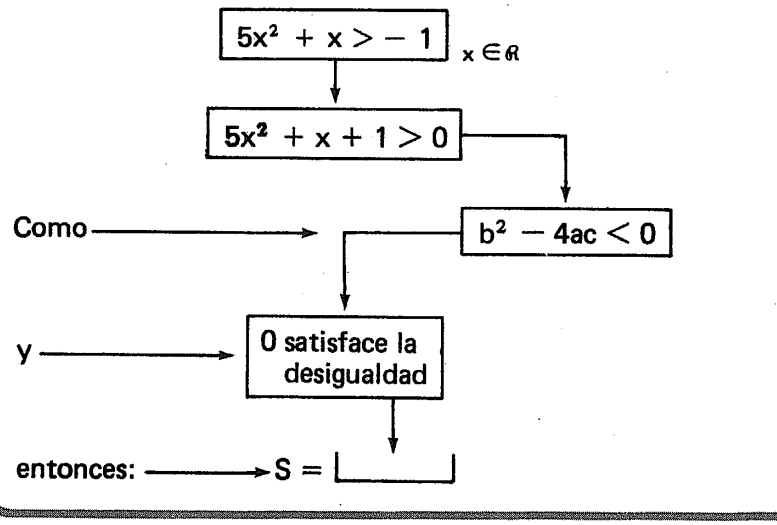
184



Respuesta en el cuadro siguiente



185



$\mathbb{R}$

186

$5x^2 + x > -1$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$5x^2 + x + 1 > 0$

$b^2 - 4ac < 0$

0 satisface la desigualdad

$S = \mathbb{R}$

187

Ejemplo 2.

Resolver: $3x + x^2 + 2 \leq 3(x - 1) \quad x \in \mathbb{R}$

- Transformar en una desigualdad equivalente de la forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

$x^2 + 5 \leq 0$

188

$3x + x^2 + 2 \leq 3(x - 1) \quad x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 \leq 0$

- Calcular $b^2 - 4ac$ y tachar la opción que no corresponda: $b^2 - 4ac =$ ____

$b^2 - 4ac \geq 0$ $\qquad$ $b^2 - 4ac < 0$

-20

$-20 < 0$

189

$3x + x^2 + 2 < 3(x - 1)$ $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 \leq 0$

$b^2 - 4ac = -20$

~~$b^2 - 4ac \geq 0$~~

$b^2 - 4ac < 0$

190

$3x + x^2 + 2 \leq 3(x - 1)$ $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 \leq 0$

Teniendo en cuenta que → $b^2 - 4ac < 0$

sustituir **cero** en la desigualdad (equivalente) y tachar la opción que no corresponda:

0 satisface la desigualdad

0 no satisface la desigualdad

Respuesta en el cuadro siguiente

$3x + x^2 \leq 3(x - 1)$ $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 \leq 0$

$b^2 - 4ac < 0$

~~0 satisface la desigualdad~~

0 no satisface la desigualdad

191

$3x + x^2 + 2 \leq 3(x - 1)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 \leq 0$

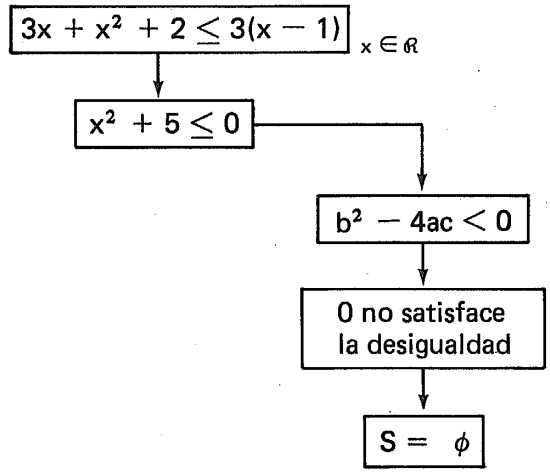
Como → $b^2 - 4ac < 0$

y → 0 no satisface la desigualdad

entonces → $S = \square$

ϕ

192



193

Ejemplo 3.

Resolver: $2x^2 - 3x \leq 800 \quad x \in \mathbb{R}$

- Transformar en una desigualdad equivalente de la forma $ax^2 + bx + 0 \leqslant 0$

$\square$

$2x^2 - 3x - 800 \leq 0$

194

$2x^2 - 3x \leq 800$ $x \in \mathbb{R}$

$2x^2 - 3x - 800 \leq 0$

- Calcular $b^2 - 4ac$ y tachar la opción que no corresponda.

$b^2 - 4ac =$ [ ]

$b^2 - 4ac \geq 0$ $\quad$ $b^2 - 4ac < 0$

73

$73 > 0$

195

$2x^2 - 3x \leq 800$ $x \in \mathbb{R}$

$2x^2 - 3x - 800 \leq 0$

como $b^2 - 4ac \geqslant 0$ $\quad$ ~~$b^2 - 4ac < 0$~~

- Transformar en una desigualdad equivalente de la forma $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$

[ ]*

* Expresar raíces como fracciones decimales con aproximación de centésimas.

Respuesta en el cuadro siguiente

$2x^2 - 3x \leq 800$ $x \in \mathbb{R}$

$2x^2 - 3x - 800 \leq 0$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$(x - 20.76)(x + 19.26) \leq 0$

196

$(x - 20.76)(x + 19.26) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

- Transformar en un sistema equivalente de 4 desigualdades de la forma $x + a \lessgtr 0$

Respuesta en el cuadro siguiente

197

$(x - 20.76)(x + 19.26) \leq 0$

① { ⓐ $x - 20.76 \geq 0$; $x \geq 20.76$; y ; ⓑ $x + 19.26 \leq 0$; $x \leq -19.76$ } o ② { ⓒ $x - 20.76 \leq 0$; $x \leq 20.76$; y ; ⓓ $x + 19.26 \geq 0$; $x \geq -19.26$ }

Sa = ____ Sc = ____

Sb = ____ Sd = ____

S1 = ____ ____ S2 = ____ = ____

Respuesta en el cuadro siguiente

198

$(x - 20.76)(x + 19.26) \leq 0$

① { ⓐ $x - 20.76 \geq 0$; $x \geq 20.76$; y ; ⓑ $x + 19.26 \leq 0$; $x \leq -19.76$ } o ② { ⓒ $x - 20.76 \leq 0$; $x \leq 20.76$; y ; ⓓ $x + 19.26 \geq 0$; $x \geq -19.26$ }

$Sa = [20.76, +\infty)$ $Sc = (-\infty, 20.76]$

$Sb = (-\infty, -19.26]$ $Sd = [-19.26, +\infty)$

$S1 = Sa \cap Sb = [\ ]$ $S2 = Sc \cap Sd = [-19.26, 20.76]$

$S =$ ____ $=$ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$(x - 20.76)(x + 1926) \leqslant 0$

(1) (a) $x - 20.76 \geqslant 0$, $x \geqslant 20.76$ y (b) $x + 19.26 \leqslant 0$, $x \leqslant -19.26$ — o — (2) (c) $x - 20.76 \leqslant 0$, $x \leqslant 20.76$ y (d) $x + 19.26 \geqslant 0$, $x \geqslant -19.26$

$Sa = [20.76, +\infty)$

$Sb = (-\infty, 19.26]$

$S1 = Sa \cap Sb = [\ ]$

$Sc = (-\infty, 20.76]$

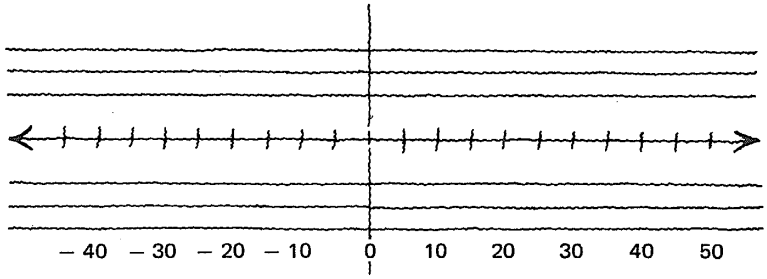
$Sd = [-19.26 + \infty)$

$S2 = Sc \cap Sd = [-19.26, 20.76)$

$S = S1 \cup S2 = [-19.26, 20.76]$

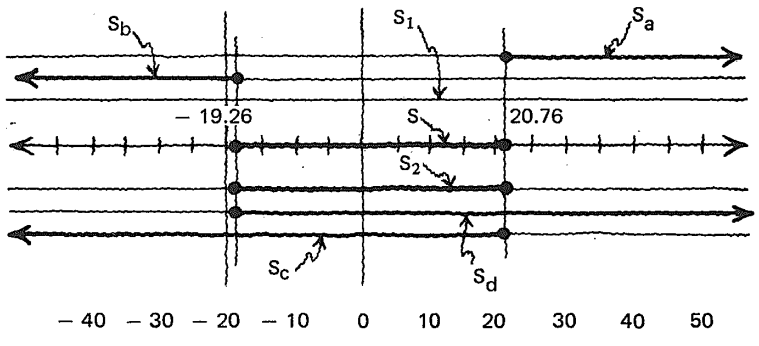
199

Representar gráficamente la solución:



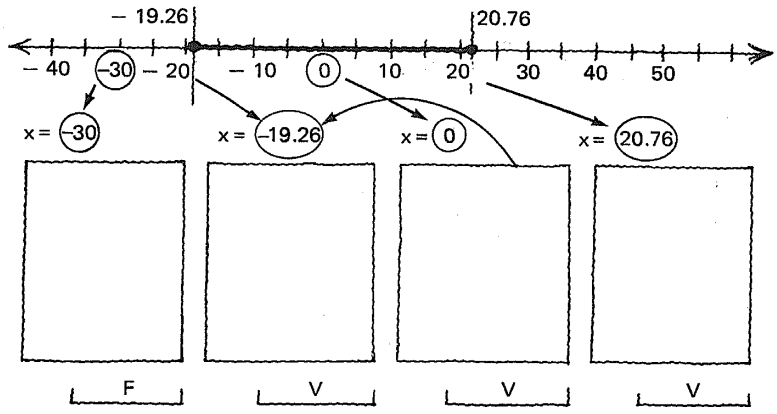
Respuesta en el cuadro siguiente

Representación gráfica de la solución:



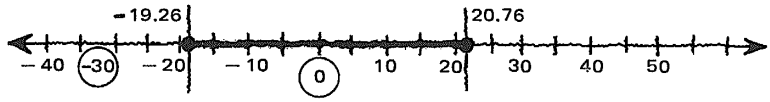
200

Comprobación: $2x^2 - 3x \leq 800 \quad x \in \mathbb{R}$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Comprobación $2x - 3x \leq 800 \quad x \in \mathbb{R}$



$x = -30$

$x = -30$

$2(-30)^2 - 3(-30) \leq 800$

$1800 + 90 \leq 800$

$1890 \leq 800$

F

$x = -19.26$

$x = -19.26$

$2(-19.26)^2 - 3(-19.26) \leq 800$

$741.90 + 57.78 \leq 800$

$799.68 \leq 800$

en forma aproximada

V

$x = 0$

$x = 0$

$2(0) - 3(0) \leq 800$

$0 \leq 800$

V

$x = 20.76$

$x = 20.76$

$2(20.76)^2 - 3(20.76) \leq 800$

$861.96 - 62.28$

$799.68 \leq 800$

en forma aproximada

V

201

La desigualdad que acabamos de resolver constituye el

modelo

que habíamos establecido al principio del módulo para nuestro

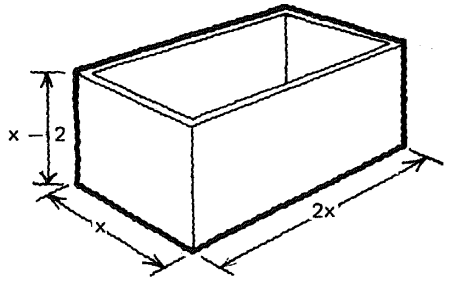
problema de la caja.

202

Recordemos
que en la desigualdad

$2x^2 - 3x \leq 800$

x representa el **ancho de una caja** cuyo costo de fabricación no debe exceder de 800 pesos.



203

Ahora,
tomemos en cuenta las

restricciones del problema

expresadas como una
desigualdad de primer grado.

$2x^2 - 3x \leq 800$

$x \in \mathbb{R} \quad x \geq 10$

(el ancho de la caja no debe ser menor de 10 centímetros)

204

Podemos interpretar la cuestión
como un **sistema conjuntivo** de desigualdades:

$2x^2 - 3x \leq 800$ y $x \geq 10$

Las dos condiciones deben satisfacerse simultáneamente:

"El costo no debe ser mayor de 800 pesos" y "El ancho no debe ser menor de 10 centímetros"

205

$2x^2 - 3x \leq 800$ y $x \geq 10$

Hemos encontrado que la solución de esta desigualdad es el intervalo:

$[-19.26, 20.76]$

por otra parte, la solución de esta desigualdad es el intervalo:

$[10, +\infty]$

206

Por lo tanto, la solución del sistema

$2x^2 - 3x \leq 800 \quad \wedge \quad x \geq 10$

es:

$[-19.26, 20.76] \_\_ [10, +\infty) = \_\_\_\_\_$

↑ Operador

207

La solución del sistema

$2x^2 - 3x \leq 800 \quad \wedge \quad x \geq 10$

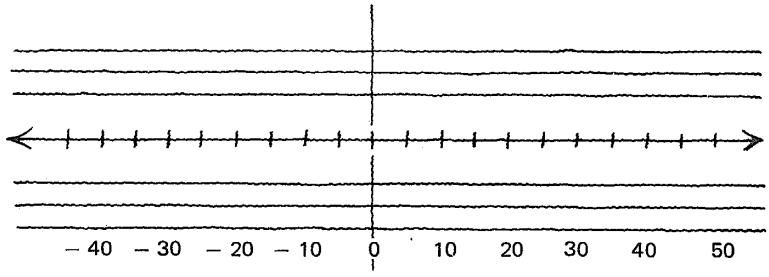
es:

$[-19.26, 20.76] \cap [10, +\infty) = [10, 20.76]$

↑ operador

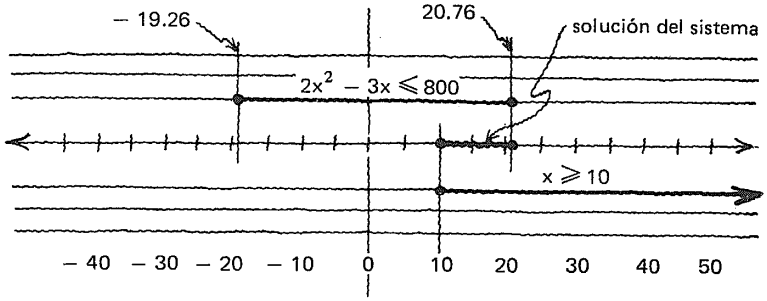
208

Representar gráficamente la solución:



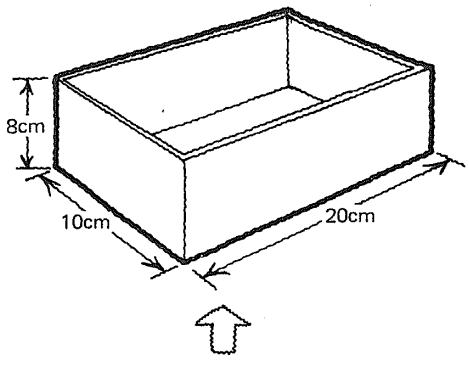
209

Representación gráfica de la solución:



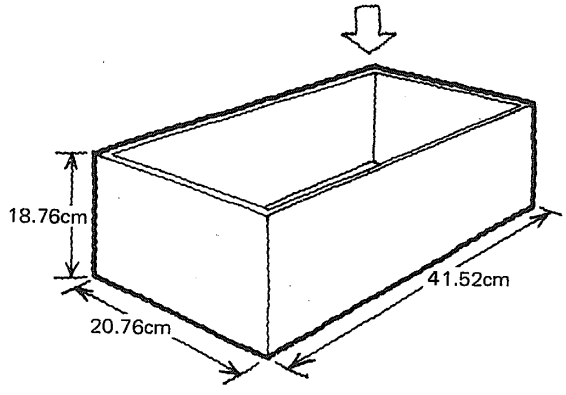
210

De esta manera, hemos encontrado la solución de nuestro problema:



Dimensiones mínimas

Dimensiones máximas



2.6.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* desigualdades de la forma $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ con el primer miembro no factorizable en $\mathbb{R}$

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100